普通高等教育“十三五”规划教材

高 等 数 学

（上册）

教材分册

主　编　张　瑶
副主编　汪永娟　段宏博

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书根据应用型本科院校学生实际情况编写，分为上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分和定积分的应用。

本书知识编排遵循“够用、管用、会用”的原则。借用实例引入定义、定理，使学生了解高等数学的应用性。例题编排主要针对基础知识和基本的运算能力训练，浅显易懂；每节后开设“加油站”，加入一些综合性或技能性较强的题目，供学有余力的学生为进一步提高数学水平而选用；各章节之后配备了足量的各种类型的习题供学生练习，以提高学生的运算能力和思维能力。

本书可作为应用型本科院校工科专业教材，也可作为高等数学课程学习的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（上册）教材分册/张瑶主编. —北京：电子工业出版社，2017.8

ISBN 978-7-121-32066-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 151438 号

策划编辑：朱干支
责任编辑：李　蕊
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：15　字数：384 千字
版　　次：2017 年 8 月第 1 版
印　　次：2017 年 8 月第 1 次印刷
定　　价：39.50 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254573，zgz@phei.com.cn。

前　言

高等数学是理工科各专业的重要基础课，它既为后续课程准备必要的数学知识与方法，又对学生科学思维的训练起着重要的作用。

目前普通本科院校有多部优秀的高等数学教材可供选择，高职类院校也有成型的教材，但对应用型本科院校来说符合其实际情况的教材很少。有些应用型本科院校选择使用普通本科院校的高等数学教材，老师在讲授时删减一些内容，这种做法使得知识无法融会贯通，给学生学习带来了很大的困扰；还有些院校选用专科教材，这些教材内容过于简单，无法满足考研学生的需求。

本书是为应用型本科院校工科专业编写的高等数学教材，充分考虑了应用型本科院校以培养具有实践能力和创新能力的应用型人才为宗旨，力求贯彻“够用、管用、会用”的三用原则。在编写过程中，进行了以下几个方面的努力。

1．文字通俗易懂，语言力求准确。

2．有些定理只给出直观的原理解释或进行部分证明，以适应本书的既定任务。

3．书中例题和习题的编排主要针对基础知识和基本的运算能力训练。

4．在每节后增设了“加油站”，增加了综合性或技能性较强的题目，以适应不同层次学生的需求。

5．每章末尾都设有小结，对本章知识进行归纳总结，使知识条理化、系统化。

为了方便使用，本书配有习题答案（电子版），请有此需要的读者登录华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）免费下载。

本书由张瑶担任主编并对全书进行统稿，由汪永娟、段宏博担任副主编，由张春志、付吉丽担任主审。编写分工如下：张瑶编写第1章与第2章；汪永娟编写第3章与第4章；段宏博编写第5章与第6章。本书得到了哈尔滨石油学院领导的大力支持，得到了曾昭英教授、朱志范教授的悉心指导，也得到了教研室同事高剑、金宝胜、王晓春、武斌4位老师在收集材料、提供习题、校稿等方面的大力帮助，在此一并表示衷心的感谢。

我们致力于编写一本适用于应用型本科院校的较高水平的优秀教材，编者做了大量工作，但由于编者的水平有限，书中难免会存在诸多错误与不足，敬请读者不吝指正，编者在此不胜感激。

编　者

2017年5月

目　　录

第 1 章　函数与极限

初等数学的研究对象是不变的量，使用的工具多是函数；高等数学研究的对象都是变动的量，也就是函数，使用的工具是极限．极限理论是高等数学的基石．本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念和它们的一些性质．

1.1　函　　数

1.1.1　集合的概念

1．集合

集合是数学中的一个最基本的概念．一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**（简称**集**）．组成这个集合的事物称为该集合的**元素**（**简称元**）．例如，一间教室里的学生构成一个集合，其中每一个学生为该集合的一个元素；偶数的全体组成偶数集合，每个偶数是它的元素．

通常用大写的英文字母 A，B，C，…表示集合；用小写的英文字母 a，b，c，…表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；否则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$（或 $a\overline{\in} A$）．

含有有限个元素的集合称为**有限集**；由无限个元素组成的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 表示．例如，不超过 10 的正偶数全体组成的集合是有限集；全体实数组成的集合是无限集；方程 $x^2+1=0$ 的实根组成的集合是空集．

2．集合的表示方法：列举法和描述法

列举法是将集合的元素一一列举出来，写在一个花括号内．

例如，所有正整数组成的集合可以表示为 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n\}$．

描述法是指集合元素所具有的性质，即将具有某种性质特征的元素 x 所组成的集合 A 记作

$$A=\{x|x\text{具有某种性质特征}\}$$

例如，$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$．

实数的集合可表示成

$$\mathbf{R}=\{x|x\text{为实数}\}$$

而集合

$$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\text{为实数}\}$$

表示 xOy 平面内单位圆上点的集合．

注意：集合具有确定性、互异性、无序性．

设 A，B 是两个集合，若 A 的每个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作 A 包含于 B（或 B 包含 A）；若 $A\subseteq B$，且有元素 $a\in B$，但 $a\notin A$，则说 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$．例如，全体自然数的集合是全体整数集合的真子集．

注：规定空集为任意集合的子集，即对任意集合 A，有 $\varnothing\subseteq A$．

3．集合的运算

若 $A\subseteq B$，且 $A\supseteq B$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$．例如，设 $A=\{1,2\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-3x+2=0\right\}$，则 $A=B$．

由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\left\{x\middle|x\in A或x\in B\right\}$$

由同时属于 A 与 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\left\{x\middle|x\in A且x\in B\right\}$$

由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\left\{x\middle|x\in A但x\notin B\right\}$$

两个集合的并集、交集、差集分别如图 1.1 中的阴影部分所示．

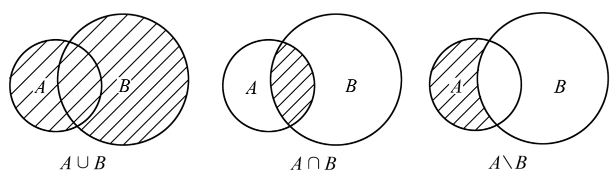


图1.1

在研究某个问题时，如果所考虑的一切集都是某个集 X 的子集，则称 X 为基本集或全集．X 的任何子集 A 关于 X 的差集 $X\backslash A$ 常称为 A 的**补集**（或**余集**），记作 $\complement_X A$．

以后用到的集合主要是数集，即集合中的元素都是数．如果没有特别声明，以后提到的数都是实数．

定理 1.1　设 A，B，C 为三个集合，则

（1）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$．（**交换律**）

（2）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．（**结合律**）

（3）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$．（**分配律**）

（4）$A\cup A=A$，$A\cap A=A$．（**幂等律**）

（5）$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$．

若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$．（**吸收律**）

特别地，由于 $A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，所以有 $A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$．

1.1.2　区间与邻域

1．区间

区间分有限区间与无限区间，有限区间分开区间、闭区间、半开半闭区间．

$a\leqslant x\leqslant b$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$；

$a<x<b$ 称为开区间，记作 (a,b)；

$a \leqslant x < b$ 称为半开半闭区间，记作 $[a,b)$；

同理，$a<x\leqslant b$ 也称为半开半闭区间，记作 $(a,b]$.

无限区间有 $[a,+\infty)$、$(a,+\infty)$、$(-\infty,a]$、$(-\infty,a)$ 及 $(-\infty,+\infty)$.

以后在不需要指出区间是否包括端点，以及不用区分是无限区间还是有限区间时，都简称为区间.

2．邻域

$|x-x_0|<\delta$，即开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$.

$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta\}$，其几何意义如图 1.2 所示.

有时用到的邻域需要把 x_0 去掉，即 $0<|x-x_0|<\delta$，称为去心邻域，记作 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ 或 $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

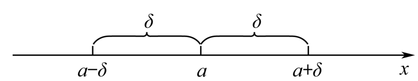


图 1.2

1.1.3　函数

函数是数学最基础、最核心的概念，函数就是研究两个变量或多个变量之间的联系. 例如，将正方形的边长设为 x，其面积设为 y，则 x,y 之间的关系为 $y=x^2\ (x>0)$. 本册书只研究两个变量之间的联系，称为一元函数.

定义 1.1　设有两个变量 x 与 y，变量 x 的变化范围为实数集合 D，如果存在一个确定的法则（或对应规则）f，使得对于每个 $x\in D$ 都有唯一的一个实数 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，y 称为因变量，f 表示 x 与 y 之间的对应法则.

x 的变化范围称为函数的定义域，记作 $D(f)$.

y 的变化范围称为函数的值域，记作 R_f.

函数的三个基本要素是定义域、对应法则和值域.

由函数的三个基本要素可知，一个函数由定义域 D、对应法则 f 和值域唯一确定，因此，两个函数只要它们的三个基本要素相同，则这两个函数就是同一函数.

函数的定义域的求法，按以下原则：

（1）若函数式含有分式，则分母不为 0.

（2）若函数式含有开偶次方根式，则被开方数非负.

（3）若函数式含有对数，则真数大于 0，底大于 0 且不等于 1.

（4）若函数式含有反正弦或反余弦，则反正弦或反余弦符号下的式子的绝对值要不大于 1.

（5）若函数式含有正切符号，则正切符号下的式子的值不能为 $K\pi+\dfrac{\pi}{2}$（K 为整数）；若函数式含有余切符号，则余切符号下的式子的值不能为 $K\pi$（K 为整数）.

（6）函数具有实际意义时，除了考虑上述要求外，还要根据实际意义来确认其定义域，如正方形边长为 x，面积为 y，则 $y=x^2$，$x\in(0,+\infty)$.

【例 1】求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解　要使数学公式有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}9-x^2 \geqslant 0\\ x-1>0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}|x| \leqslant 3\\ x>1\end{cases}$$

由此得$1<x\leqslant 3$，因此函数的定义域为$(1,3]$.

【例 2】 判断下列函数是否相同，并说明理由.

（1） $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$；

（2） $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

（3） $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$；

（4） $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

解 （1）不相同．因为 $y=x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$，即$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

（2）不相同．虽然 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，但对应法则不同，$y=\sqrt{x^2}=|x|$.

（3）相同．虽然这两个函数的表现形式不同，但它们的定义域$(-\infty,+\infty)$、对应法则和值域均相同，所以这两个函数相同.

（4）相同．虽然它们的自变量与因变量所用的字母不同，但其定义域$(-\infty,+\infty)$、对应法则和值域$(-\infty,+\infty)$均相同，所以这两个函数相同.

1.1.4　函数的表示法

1．解析法（也称公式法）

解析法常见的形式如下所述.

（1）显函数，如 $y=x^2+\mathrm{e}^x+1$.

（2）隐函数，如由方程 $x^2+x-y=0$ 确定的函数 $y=f(x)$，它可解出显函数 $y=x^2+x$．有些隐函数是无法变成显函数的，如由方程 $\mathrm{e}^y+\sin xy=1$ 确定的函数 $y=f(x)$.

（3）参数方程，如$\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\end{cases}$，即 $x^2+y^2=R^2$，可以看成 y 为 x 的函数，称 t 为参数.

显函数 $y=f(x)$ 也可写成参数方程$\begin{cases}x=x\\ y=f(x)\end{cases}$.

（4）复合函数.

y 是 u 的函数，u 是 x 的函数，一般来讲，y 也间接是 x 的函数了.

如 $y=\mathrm{e}^u$，$u=2x+1$，则 $y=\mathrm{e}^{2x+1}$ 是 x 的函数.

但任何事情总有例外，如 $y=\ln u$、$u=-\sqrt{x}$，就不能说 y 是 x 的复合函数了，为了更严格起见，定义复合函数如下.

定义 1.2　$y=f(u)$，$u=u(x)$ 且 $D(f)\cap R_u\neq\varnothing$，称 y 是 x 的复合函数，u 称为中间变量.

（5）反函数.

我们知道一元函数是两个变量之间的关系，这两个变量谁为因变量，谁为自变量，是人为确定的，如函数 $y=2x-1$，x 是自变量，y 是因变量.

有时自变量 x 也可作为因变量，此时称 $x=\dfrac{y+1}{2}$ 是函数 $y=2x-1$ 的反函数（互为反函数），习惯上因变量用 y 表示，自变量用 x 表示，此时 $y=2x-1$ 的反函数写作 $y=\dfrac{x+1}{2}$．在同一直角坐标系中，它俩的图像关于直线 $y=x$ 对称，但应注意 $y=2x-1$ 与 $x=\dfrac{y+1}{2}$ 的图像是同一个.

$y=f(x)$ 的反函数可记作 $y=f^{-1}(x)$.

2．表格法

用表格来表示两个变量之间关系的方法，称为表格法.

如数学用表就是典型的表格法．实际上，科研中的一些实验数据，多数都采用表格法.

3．图像法

可在直角坐标系或极坐标系中，用图像表示两个变量之间的联系，这种方法比较直观.

1.1.5　常用函数

1．基本初等函数

下面 6 种函数称为基本初等函数：

（1）常数函数 $y=C$（C 为常数）（见图 1.3）.

（2）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为常数）（见图 1.4）.

（3）指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）（见图 1.5）.

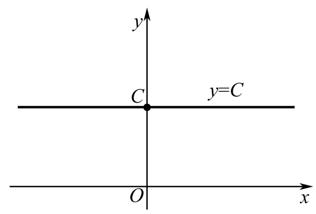


图 1.3

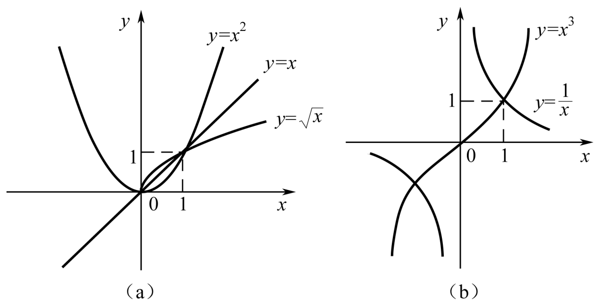


图1.4

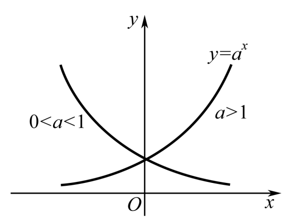


图1.5

（4）对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）（见图 1.6）.

（5）三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$.

注：自变量 x 一律采用弧度（见图 1.7 和图 1.8）.

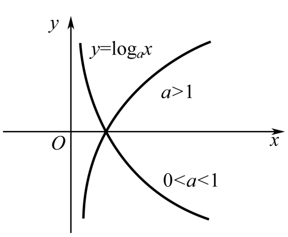


图1.6

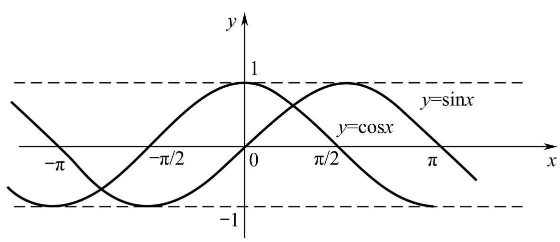
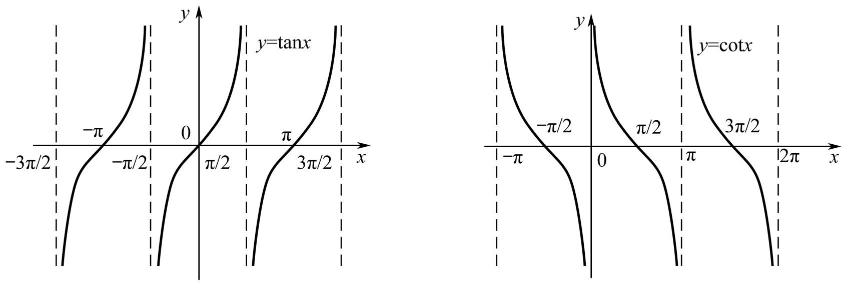


图1.7

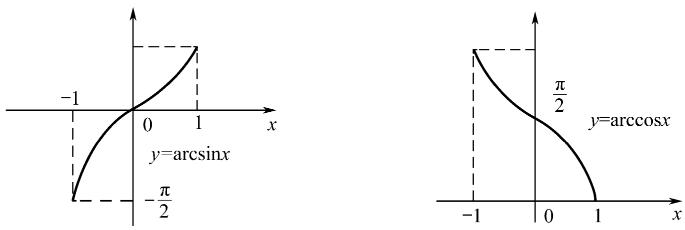


（a）　　（b）

图1.8

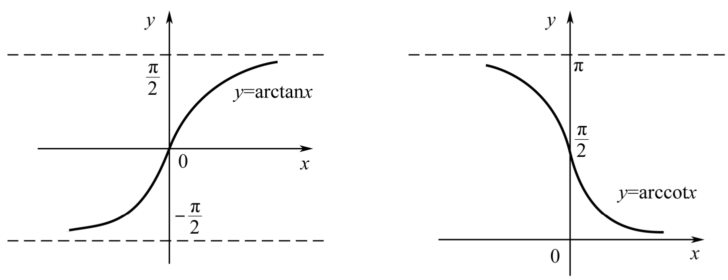
（6）反三角函数 $y=\arcsin x$ 、$y=\arccos x$ 、$y=\arctan x$ 、$y=\operatorname{arc}\cot x$（见图 1.9 和图 1.10）.

注：基本初等函数与多项式称为简单函数.



（a）　　（b）

图1.9



（a）　　（b）

图1.10

2．初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合，并用一个式子表示的函数称为初等函数.

例如，$y=x^2+\ln(x+1)+\arcsin \mathrm{e}^{x^2}$ 就是初等函数.

3．分段函数

$$y=\begin{cases} f(x), & x>a \\ A, & x=a \\ g(x), & x<a \end{cases} \text{或}\ y=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ A, & x=a \end{cases}$$

需要指出的是：分段函数是一个函数由两个或两个以上不同的解析式表示，不能将分段函数当作几个函数．求分段函数的函数值时，要先判断自变量所属的范围．下面给出一些今后常用的分段函数.

【例 3】设函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$，求函数的定义域和 $f(0.01)$、$f(4)$.

解　由 $0\leqslant x\leqslant 1$，$x>1$ 可知函数的定义域为 $[0,+\infty)$.

$$f(0.01)=2\sqrt{0.01}=0.2，\quad f(4)=1+4=5$$

【例 4】绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

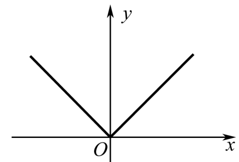


图1.11

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=[0,+\infty)$，如图 1.11 所示.

【例 5】符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

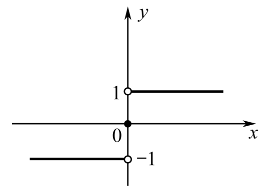


图1.12

的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{-1,0,1\}$，如图 1.12 所示.

【例 6】最大取整函数 $y=[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．例如，$[-3.14]=-4$，$[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$ 等．函数 $y=[x]$ 的定义域 $D(f)=(-\infty,+\infty)$，值域 $R(f)=\{整数\}$．一般 $y=[x]=n$，$n\leqslant x<n+1$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，如图 1.13 所示.

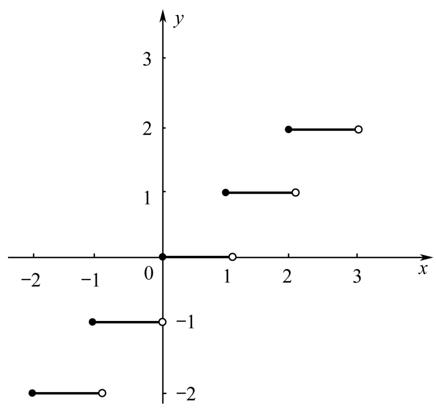


图1.13

加 油 站

【例 7】求函数 $y=\ln(1+x)+\sqrt{3+x}+\arccos\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域.

解

$$\begin{cases}1+x>0\\ 3+x\geqslant 0\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,3]$$

【例 8】$f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=\ln x^2$ 是不是同一函数？

解　$f(x)=2\ln x$ 的定义域为 $x>0$，$g(x)=\ln x^2$ 的定义域为 $x\neq 0$，由于定义域不同，所以不是同一函数.

【例 9】 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(x-1)$ 及 $f\left[f(x)\right]$.

解　$f(x-1)=\dfrac{1}{1-(x-1)}=\dfrac{1}{2-x}$

$$f\left[f(x)\right]=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}$$

【例 10】 已知 $f(x-1)=x^2+x$，求 $f(x)$.

解　设 $x-1=t$，则 $x=t+1$，因此

$$f(t)=(t+1)^2+t+1=t^2+3t+2$$

$$f(x)=x^2+3x+2$$

【例 11】 已知 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

解　设 $x-\dfrac{1}{x}=t$，且 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2$，则 $f(t)=t^2+2$，所以

$$f(x)=x^2+2$$

【例 12】 求 $y=1+2\ln(4x-1)$ 的反函数.

解　$\ln(4x-1)=\dfrac{y-1}{2}$，$4x-1=\mathrm{e}^{\frac{y-1}{2}}$，$x=\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\frac{y-1}{2}}+1\right)$

因此，其反函数为 $y=\dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\frac{x-1}{2}}+1\right)$.

【例 13】 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, x<1\\ x,\ \ x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x+2,\ \ x<0\\ x^2-1,\ \ x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[g(x)]$.

解　将 $g(x)$ 代入 $f(x)$ 即得

$$f[g(x)]=\begin{cases}2^{g(x)}, g(x)<1\\ g(x), g(x)\geqslant 1\end{cases}$$

（1）当 $g(x)<1$ 时，有下面两种情形：

当 $x<0$ 时，$g(x)=x+2<1\Rightarrow x<-1$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-1<1\Rightarrow 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

（2）当 $g(x)\geqslant 1$ 时，有下面两种情形：

当 $x<0$ 时，$g(x)=x+2\geqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x<0$.

当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2-1\geqslant 1\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$.

综合以上可得所求复合函数为

$$f[g(x)]=\begin{cases}2^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ 2^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

【例 14】函数图像变换.

（1）已知 $y=f(x)$ 的图像，当 $a>0$ 时，$y=f(x+a)$ 的图像是由 $y=f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位得到的；当 $a<0$ 时，$y=f(x+a)$ 的图像是由 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $|a|$ 个单位得到的.

（2）当 $a>0$ 时，$y=f(x)+a$ 的图像是由 $y=f(x)$ 的图像向上平移 a 个单位得到的；当 $a<0$ 时，$y=f(x)+a$ 的图像是由 $y=f(x)$ 的图像向下平移 $|a|$ 个单位得到的.

（3）$y=f(-x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴 $(x=0)$ 对称.

（4）$y=-f(x)$ 的图像与 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴 $(y=0)$ 对称.

（5）$y=|f(x)|$ 的图像由函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折到上方并与 x 轴上方图像合并而成.

（6）$y=f(|x|)$ 的图像由 $y=f(x)$ 在 $x>0$ 的图像与 $x>0$ 的部分关于 y 轴对称的图像合并而成.

习　题　1.1

一、填空题

1．设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f\{f[f(x)]\}=$______________.

2．设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，则 $f(x)=$____________.

3．$y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域是________________.

4．函数 $y=\sqrt{\sin x^2}$ 是由简单函数__________复合而成的.

5．设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$f[g(x)]=x$，则 $g(x)=$______________.

6．$f(x)=\ln(2x+1)$，其反函数为_______________.

二、单项选择题

1．下列函数为基本初等函数的是（　　）.

A．$y=2\ln x$　　B．$y=2x$　　C．$y=3^x$　　D．$y=\sin x^2$

2．$y=\lg(2-x)+\sqrt{3+2x-x^2}$ 的定义域为（　　）.

A．$[-1,2)$　　B．$[-1,2]$　　C．$[-1,3]$　　D．$[2,3]$

3．已知 $f[\varphi(x)]=x$，$\varphi(x)=x-1$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）.

A．$f(x)=x+1$　　B．$f(x)=\varphi(x)$　　C．$f(x)=x$　　D．无法判定

4．下列函数组为同一函数的是（　　）.

A．$y=\sin x$ 与 $y=\dfrac{1}{\csc x}$　　B．$y=\sec^2 x-\tan^2 x$ 与 $y=1$

C．$y=3x$ 与 $y=\dfrac{3x^3}{x^2}$　　　　D．$y=\ln\dfrac{1}{x}$ 与 $y=-\ln x$

三、计算题

1．设函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-1 \\ -x, & |x|\leqslant 1 \\ x-2, & x>1 \end{cases}$，求 $f\left(2x+1\right)$ 的表达式.

2．将下列函数用几个简单函数复合而成.

（1）$y=\sqrt{1+x^2}$；（2）$y=\sin^3\sqrt{x}$；（3）$y=2^{\tan 2x}$.

3．设 $f(x)=ax^2+bx+5$，且 $f\left(x+1\right)-f\left(x\right)=8x+3$，求 a,b 的值.

4．设 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，求其反函数.

5．设 $f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{x^4+1}$，求 $f\left(x\right)$.

6．若函数 $y=\dfrac{x}{kx^2+kx+1}$ 的定义域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$，求实数 k 的取值范围.

7．设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$g\left(x\right)=x^2$，求 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 及 $g\left[f\left(x\right)\right]$.

8．设 $f\left(x\right)=\begin{cases} 1, & |x|<1 \\ 0, & |x|=1 \\ -1, & |x|>1 \end{cases}$，$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x$，求 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 及 $g\left[f\left(x\right)\right]$.

1.2　函数的性质

1.2.1　有界性

定义 1.3　设 $f\left(x\right)$ 在 D 上有定义，如果存在一个正常数 M，对任何 $x\in D$，都有 $\left|f\left(x\right)\right|\leqslant M$，则称 $f\left(x\right)$ 在 D 上有界；否则，称 $f\left(x\right)$ 在 D 上无界.

例如，$y=\sin 2x$ 及 $y=\cos\dfrac{1}{x}$ 都是有界函数，而 $y=x^3$ 及 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其定义域内都是无界函数.

注：函数的有界性与 x 取值的区间 D 有关．例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 上是无界的，但它在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 上有界.

【例 1】证明函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

证　因为 $(1-|x|)^2\geqslant 0$，所以 $\left|1+x^2\right|\geqslant 2|x|$，故

$$\left|f(x)\right|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{2|x|}{2\left|1+x^2\right|}\leqslant\frac{1}{2}$$

对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立，因此函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数.

1.2.2　单调性

定义 1.4　设 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，任取两点 $x_1,x_2\in D$，且当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少的.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如，$y=-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是单调减少的.

$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$ 是单调减少函数，在 $(0,+\infty)$ 也是单调减少函数，但不能说 $y=\dfrac{1}{x}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调减少函数.

$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 不是单调函数，但在 $(-\infty,0]$ 上 $y=x^2$ 是单调减少函数，在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加函数.

如何判断一个函数是增函数，还是减函数？可以用导数来判断，在第 3 章中将做专门研究.

1.2.3　周期性

定义 1.5　设 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，如果存在一个非零常数 T 及任意 $x\in D$，且 $x+T\in D$，总有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数. 如果存在最小正数 T，则称 T 为周期函数的最小正周期.

例如，$y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数.

$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 与 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 是以 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$（$\omega\neq 0$）为周期的周期函数.

$y=\tan x$ 与 $y=\cot x$ 是以 $T=\pi$ 为周期的周期函数.

$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 与 $y=A\cot(\omega x+\varphi)$ 是以 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$（$\omega\neq 0$）为周期的周期函数.

1.2.4　奇偶性

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；否则，称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇偶性也可采用以下方式判断：

若 $f(x)+f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $f(x)-f(-x)=0$，则 $f(x)$ 为偶函数；

若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$，则 $f(x)$ 为奇函数；

若 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$，则 $f(x)$ 为偶函数.

【例 2】判断函数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，它关于原点对称，又因为

$$f(-x)=(-x)\sin\left(\frac{1}{-x}\right)=x\sin\frac{1}{x}=f(x)$$

所以 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ 是偶函数.

【例 3】讨论函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的奇偶性.

解 函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 是对称区间.

方法一：$$f(x)+f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$=\ln\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]=\ln 1=0$$

故 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为奇函数.

方法二：$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$$

故 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 为奇函数.

综上，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

加 油 站

【例 4】证明：$f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 是偶函数.

证 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$.

方法一：$$f(-x)-f(x)=(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)-x\left(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=(-x)\left(\frac{2^x}{1-2^x}+\frac{1}{2^x-1}+1\right)=(-x)(-1+1)=0$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

方法二：$$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{-x\left(\dfrac{1}{2^{-x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)}{x\left(\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)}=-\frac{\dfrac{2^x}{1-2^x}+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2^x-1}+\dfrac{1}{2}}=\frac{2\times 2^x-2^x+1}{2+2^x-1}=1$$

故 $f(x)$ 是偶函数.

【例 5】设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，证明 $h(x)=f(x)-f(-x)$ 一定是奇函数，$g(x)=f(x)+f(-x)$ 一定是偶函数.

证 因为 $h(-x)=f(-x)-f(x)=-\left[f(x)-f(-x)\right]=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数. 同理可证 $g(x)$ 为偶函数.

注：对于常用的函数 $f(x)=a^x$，$h(x)=a^x-a^{-x}$ 为奇函数；$g(x)=a^x+a^{-x}$ 为偶函数.

对于 $f(x)=\ln(1+x)$，$h(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为奇函数，$g(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)=\ln(1-x^2)$ 为偶函数.

【例 6】 设 $f(x)$ 在一个关于原点对称的区间上有定义，证明 $f(x)$ 一定可以表示成一个奇函数与偶函数之和.

证　$\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 为奇函数，$\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 为偶函数，则

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$$

【例 7】 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 为偶函数，证明 $h(x)=f(x)g(x)$ 为奇函数.

证　因为 $h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$，所以 $h(x)$ 为奇函数.

为了便于记忆，将其规律表示如下：

（1）奇函数+奇函数=奇函数

（2）偶函数+偶函数=偶函数

（3）奇函数+偶函数=非奇非偶函数

（4）奇函数×奇函数=偶函数

（5）偶函数×偶函数=偶函数

（6）奇函数×偶函数=奇函数

下面再给出一些常见的奇函数与偶函数，见表 1.1.

表 1.1

	奇　函　数	偶　函　数
1	$y=x^{2k+1}$，$k\in\mathbf{Z}$	$y=x^{2k}$，$k\in\mathbf{Z}$
2	$y=\sin x$	$y=\cos x$
3	$y=f(x)-f(-x)$ 如 $y=a^x-a^{-x}$，$y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$	$y=f(x)+f(-x)$ 如 $y=a^x+a^{-x}$，$y=\ln(1+x)+\ln(1-x)$
4	$y=\tan x$	$y=c$
5	$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$y=f$ (偶)

例如，$y=2$ 是偶函数.

$y=0$ 既是奇函数，又是偶函数，它身兼二职.

$y=f(\cos x)$，$y=f(|x|)$ 一定是偶函数.

$y=f$ (奇)不能说一定是奇函数.

$y=\sin^2 x$ 是偶函数，$y=\sin x+1$ 是非奇非偶函数.

【例 8】 设 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，证明 $f[g(x)]$ 是偶函数，$g[g(x)]$ 为奇函数.

证　设 $h(x)=f[g(x)]$，则

$$h(-x)=f[g(-x)]=f[-g(x)]=f[g(x)]=h(x)$$

所以 $h(x)=f\left[g(x)\right]$ 是偶函数.

设 $F(x)=g\left[g(x)\right]$，则

$$F(-x)=g\left[g(-x)\right]=g\left[-g(x)\right]=-g\left[g(x)\right]=-F(x)$$

所以 $F(x)=g\left[g(x)\right]$ 是奇函数.

【例 9】 设 $f(x)$ 是奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，证明 $f(0)=0$.

证　由 $f(-x)=-f(x)$，令 $x=0$，则有

$$f(0)=-f(0)，\ 2f(0)=0$$

即 $f(0)=0$.

【例 10】 已知 $f(x)=\dfrac{x^3+a}{x^2+bx+1}$ 是奇函数，$x\in\mathbf{R}$，求 a、b 的值.

解　由 $f(0)=0\Rightarrow a=0$.

由 $f(-1)=-f(1)\Rightarrow\dfrac{-1+a}{1-b+1}=-\dfrac{1+a}{1+b+1}$，因为 $a=0$，代入得到 $b=0$.

【例 11】 证明两个增函数之和是增函数（两个减函数之和是减函数）.

证　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是增函数，令 $h(x)=f(x)+g(x)$.

$\forall\ x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}h(x_2)-h(x_1)&=f(x_2)+g(x_2)-\left[f(x_1)+g(x_1)\right]\\&=\left[f(x_2)-f(x_1)\right]+\left[g(x_2)-g(x_1)\right]>0\end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 为增函数.

【例 12】 证明两个正增函数之积为增函数（两个正减函数之积为减函数）.

证　设 $h(x)=f(x)g(x)$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是正增函数.

$\forall\ x_1<x_2$，有

$$\begin{aligned}h(x_2)-h(x_1)&=f(x_2)g(x_2)-f(x_1)g(x_1)\\&=f(x_2)g(x_2)-f(x_2)g(x_1)+f(x_2)g(x_1)-f(x_1)g(x_1)\\&=f(x_2)\left[g(x_2)-g(x_1)\right]+g(x_1)\left[f(x_2)-f(x_1)\right]\end{aligned}$$

$\because\ f(x)$ 与 $g(x)$ 都是为正的增函数

$\therefore\ f(x_2)>0$，$g(x_2)-g(x_1)>0$，$g(x_1)>0$，$f(x_2)-f(x_1)>0$

$\therefore\ h(x_2)-h(x_1)>0$

$\therefore\ h(x)=f(x)g(x)$ 为增函数

【例 13】 设 $y=f(u)$ 是定义在 B 上的增（减）函数．$u=\varphi(x)$ 是定义在 A 上的增函数，且 $\varphi(x)$ 的值域 $C\subseteq B$，证明 $y=f\left[\varphi(x)\right]$ 是定义在 A 上的增（减）函数.

证　不妨设 $y=f(u)$ 为增函数，$\forall\ x_1<x_2\in A$，有 $\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$.

所以 $f\left[\varphi(x_2)\right]>f\left[\varphi(x_1)\right]$，$y=f\left[\varphi(x)\right]$ 是定义在 A 上的增（减）函数.

【例 14】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 T 为周期的周期函数，证明 $f(x-T)=f(x)$.

证　设 $x-T=u$，则 $x=u+T$．显然

$$f(u)=f(u+T)$$

即 $f(x-T)=f(x)$.

【例 15】设 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的以 2 为周期的函数，对 $k\in\mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$．已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$，求 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式．

解　平移变换，当 $x\in I_k$ 时，$2k-1<x\leqslant 2k+1$，即 $-1<x-2k\leqslant 1$．

$x-2k\in I_0$，又 $-2k$ $(k\in\mathbf{Z})$ 是 $f(x)$ 的一个周期，所以

$$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2,\quad x\in I_k$$

【例 16】$F(x)$ 是奇函数，且 $x>0$，$F(x)=\mathrm{e}^x-x^2$，试求当 $x<0$ 时，$F(x)$ 的解析式．

解　设 $x<0$，则 $-x>0$，有

$$F(-x)=\mathrm{e}^{-x}-(-x)^2=\mathrm{e}^{-x}-x^2$$

因为 $F(x)$ 是奇函数，故 $F(-x)=-F(x)$，因此有

$$F(x)=-F(-x)=-(\mathrm{e}^{-x}-x^2)=x^2-\mathrm{e}^{-x},\quad x<0$$

习　题　1.2

一、填空题

1．$f(x)=2^{x^2-1}$ 在_________区间是减函数；在_________区间是增函数．

2．已知 $f(x)$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，且 $f(x)$ 恒正（或恒负），则 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ 在 $(-\infty,0)$ 是______________．

3．$f(x)=ax^4+bx^2-4$，若 $f(2)=6$，则 $f(-2)=$____________．

4．$f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数，$x\in\mathbf{R}$，$k\in\mathbf{Z}$，用 I_k 表示区间 $[4k-2,4k+2]$．已知 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^4+x^2$，则 $f(x)$ 在 I_k 上的解析式为_________．

5．$F(x)$ 是奇函数且 $x<0$，$F(x)=3x^3-2x^2+4x+1$，则当 $x>0$ 时，$F(x)=$________．

二、选择题

1．下列函数中为奇函数的是（　　）．

A．$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+1$　　B．$y=\sin x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}$

C．$y=x\cos^3 x+\cos x$　　D．$y=x$

2．下列函数中为偶函数的是（　　）．

A．$y=\sin^2 x+\sin x$　　B．$y=\begin{cases}x^2+x, & x<0\\ -x^2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$

C．$y=\ln(2+x)+\ln(2-x)+1$　　D．$y=1+\mathrm{e}^x$

3．如果偶函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数，且最小值为 5，那么 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1]$ 上是（　　）．

A．减函数且最小值为 5　　B．增函数且最小值为 -5

C．增函数且最大值为 5　　D．减函数且最小值为 -5

4．若 $f(x)=x^{\frac{1}{n^2+n+1}}$ $(n\in\mathbf{N})$，则 $f(x)$ 是（　　）．

A．奇函数 B．偶函数 C．既奇又偶 D．非奇非偶

5．若 $f(x)=(m-1)x^2+2mx+3(m-1)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 在区间 $(2,5)$ 上是（ ）.

A．不具有单调性 B．不能判定其单调性

C．减函数 D．增函数

6．$x\in\mathbf{R}$，T 是一个非零常数，总有 $f(x+T)=-f(x)$，则（ ）.

A．$f(x)$ 一定是周期函数

B．$f(x)$ 一定不是周期函数

C．$f(x)$ 可能是周期函数，也可能不是周期函数

D．无法判定周期性

7．$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\neq 0$，T 是一个非零常数，总有 $f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$，则（ ）.

A．$f(x)$ 一定不是周期函数

B．$f(x)$ 一定是周期函数

C．$f(x)$ 可能是周期函数，也可能不是周期函数

D．无法判定周期性

三、计算题

1．若 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，且 $f(x)+g(x)=x^2+x+1$，求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的解析式.

2．将函数 $y=\mathrm{e}^x$ 表示为偶函数和奇函数之和的形式.

3．下列函数中，哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些函数既不是奇函数，也不是偶函数？

（1）$y=x^3+x^5$；（2）$y=x-\cos x$；（3）$y=\dfrac{x(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x+1}$；（4）$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4．下列函数中哪些是周期函数？

（1）$y=\sin^2 x$；（2）$y=\tan x^2$；（3）$y=\tan(x-2)$；（4）$y=1+\tan x$；

（5）$y=x-[x]$，其中 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，如 $[2.1]=2$，$[-2.1]=-3$.

5．已知 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sin x$，求 $f(x)$.

1.3 数列的极限

1.3.1 数列极限

按照一定顺序排列的一列数叫作数列，这里只考虑无穷数列．例如，$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，其中 a_n 表示第 n 项，称为该数列的通项，该数列简记为 $\{a_n\}$.

数列 $\{a_n\}$ 就是一个定义在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数：

$$a_n=f(n),\quad n=1,2,\cdots$$

数列的极限就是研究该数列，当 n 无限增大时，数列通项 a_n 是否趋于一个常数 a.

观察下面两个数列：

（1）$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$

（2）$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$

将上述两个数列的各项用数轴上的对应点 $x_1,x_2,\cdots$表示，如图 1.14 所示.

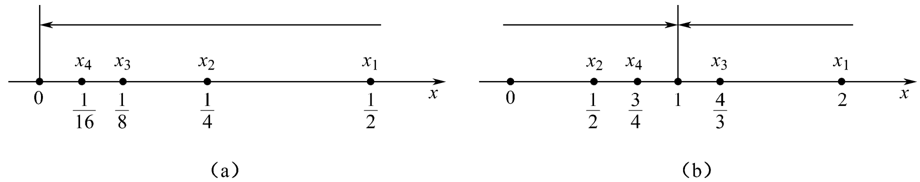


图1.14

从图 1.14 可知，当 n 无限增大时，数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$在数轴上的对应点从原点的右侧无限接近于 0；数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$在数轴上的对应点从 x=1 的两侧无限接近于 1．一般地，可以给出下面的定义.

定义 1.7　数列$\{a_n\}$，当 n 无限增大时，如果其通项 a_n 与一个常数 a 无限接近，即$|a_n-a|$趋于 0，称数列$\{a_n\}$收敛于 a，或称数列$\{a_n\}$以 a 为极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或者 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$；否则称$\{a_n\}$发散或没有极限.

【例 1】 考察下列数列在 $n\to\infty$ 时的变化情况.

（1）$\{2\}$；（2）$\left\{\frac{1}{n}\right\}$；（3）$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$；（4）$\{2n-1\}$；（5）$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$；

（6）$\left\{(-1)^{n-1}\right\}$；（7）$\left\{\frac{2n^2+10n+1}{n^2+1}\right\}$；（8）$\left\{\frac{100n+1}{3n^2+6n+1}\right\}$；（9）$\left\{\frac{n^2+1}{n+1}\right\}$.

解　（1）数列 $2,2,\cdots,2\cdots$ 是一个常数列，$n\to\infty$ 时，a_n 始终为 2，因此 $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=2$.

（2）数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$，当 n 无限增大时，分母无限增大，分子是常数 1，$a_n=\frac{1}{n}$ 无限趋于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

（3）数列 $1-1,1-\frac{1}{2},1-\frac{1}{3},\cdots,1-\frac{1}{n},\cdots$，当 n 无限增大时，$a_n=1-\frac{1}{n}$ 无限趋于 1，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{n}=1$.

（4）数列 $1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots$，当 n 无限增大时，a_n 也无限增大，且 a_n 的趋势不是一个确定的数，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)$ 不存在，这种情形可记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)=\infty$.

（5）数列 $\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\frac{1}{2^n},\cdots$，当 n 无限增大时，a_n 也无限趋于 0，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

（6）数列 $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$，当 n 按奇数无限增大时，a_n 始终为 1；当 n 按偶数无限增大时，a_n 始终为 -1，即当 $n\to\infty$ 时，a_n 在 1 与−1 之间摆动，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$ 不存在.

（7）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+10n+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{10}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$，由于当 n 无限增大时，$\dfrac{10}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^2}$ 都趋于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+10n+1}{n^2+1}=2$.

（8）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+1}{3n^2+6n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{100}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$，由于当 n 无限增大时，$\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^2}$ 都趋于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n+1}{3n^2+6n+1}=0$.

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$，由于当 n 无限增大时，$\dfrac{1}{n}$ 与 $\dfrac{1}{n^2}$ 都趋于 0，此时分子趋于 1，分母趋于 0，$a_n=\dfrac{n^2+1}{n+1}$ 趋于 ∞，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n+1}=\infty$（不存在）.

由（7）、（8）、（9）三题的结果，能“悟”出一个重要的公式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0n^m+b_1n^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ 0, & k<m\\ \infty, & k>m\end{cases},\quad a_0b_0\neq 0 \tag{1.1}$$

【例 2】 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=2$，求 a、b 的值.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}+an+b\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1+an^2+(a+b)n+b}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+1)n^2+(a+b)n+b+1}{n+1}=2$

由公式（1.1）知

$$\begin{cases}a+1=0\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}$$

在求数列极限时，利用数列极限的四则运算法则会更方便.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$c$ 为常数，则:

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n=ca$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a\pm b$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=ab$

（4）$b\neq 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$

【例 3】 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+1)n^2+2n+3}{an^2+n+1}=3$，求 a.

解　由公式（1.1）知 $\dfrac{a+1}{a}=3$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$.

【例 4】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{2n+1}+4^n}{9^n-2^n}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n+1}+4^n}{9^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 9^n+4^n}{9^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n}=3$$

1.3.2　收敛数列的性质

如何鉴别一个数列是否收敛，是我们急需解决的理论问题，为了今后学习的需要，不加证明地给出以下几个定理.

定理 1.2　（极限的唯一性）如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，那么它的极限是唯一的.

【例 5】证明数列 $\{a_n\}=\left\{\cos\dfrac{n}{2}\pi\right\}$ 无极限.

证　$\{a_n\}$：$0,-1,0,1,0,-1,0,1,\cdots$

$\{a_{2n-1}\}$：$0,0,\cdots$

$\{a_{4n}\}$：$1,1,\cdots$

当 n 无限增大时，其值在 $-1,0,1$ 之间摆动，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{n}{2}\pi$ 不存在.

定理 1.3　收敛数列一定有界（反之未必）.

定理 1.4　（收敛数列的保号性）如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在正整数 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $a_n>0$（或 $a_n<0$）.

定理 1.5　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$.

定理 1.6　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+k}=a\ (k\in\mathbf{N})$.

加 油 站

【例 6】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}[1+3+\cdots+(2n-1)]=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+2n-1)n}{2n^2}=1$$

【例 7】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n+2}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}}=1$$

【例 8】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\right]$.

解　$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+3+\cdots+n}-\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2+3+\cdots+n}+\sqrt{1+2+3+\cdots+(n-1)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{2}}+\sqrt{\frac{1-\frac{1}{n}}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例 9】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

【例 10】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)n$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

【例 11】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解 $$1-\frac{1}{n^2}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

【例 12】已知函数 $f(x)=2^x$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]$.

解 由 $f(x)=2^x$，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left[f(1)f(2)\cdots f(n)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln\left(2^1\times 2^2\times\cdots\times 2^n\right)=\lim_{n\to\infty}\ln 2^{\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=\ln\sqrt{2}$$

习 题 1.3

一、填空题

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n+1}=$__________.

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+1}=$____________.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(a+1)n^2+n-1}{(2a+3)n^2+1}=1$，则 $a=$________.

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{4^n}=$__________.

5．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)=$__________.

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=$__________.

二、单项选择题

1．设 $a_n=\begin{cases}\dfrac{(a+2)n+1}{an+2}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{(2a+1)n^2+1}{a\cdot n^2+1}, & n\text{为偶数}\end{cases}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$，则（　　）正确.

A．$a=1$、$b=\dfrac{5}{2}$　　B．$a=1$、$b=3$

C．$a=-1$、$b=-3$　　D．$a=2$、$b=3$

2．当 $n\to\infty$ 时，下列极限不存在的数列是（　　）.

A．$1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},0,\dfrac{1}{4},\cdots$

B．$1+1,\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{9},\dfrac{1}{4}+\dfrac{7}{16},\cdots,\dfrac{1}{n}+\dfrac{2n-1}{n^2}$

C．$a_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{n^2+n+1}{n^2+1}, & n\text{为偶数}\end{cases}$

D．$1,\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{7}{6},\dfrac{1}{7},\cdots$

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^3}{2n^3+4n^2+1}=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．1　　C．4　　D．3

4．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{an^2+n}{n+1}+an+b\right)=3$，则（　　）正确.

A．$a=1$、$b=3$　　B．$a=0$、$b=2$

C．$a=0$、$b=1$　　D．$a=3$、$b=0$

三、求下列极限

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

2．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}\times\cdots\times\sqrt[2^n]{2}\right)$.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+2n}{n+1}-n+1\right)$.

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

5．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\cdots+2n}{(2n-3)(2n+3)}$.

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2\times4}+\dfrac{1}{4\times6}+\dfrac{1}{6\times8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}\right]$.

1.4　函数的极限

1.4.1　函数极限

函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，考察函数 $f(x)$ 的极限就是考察自变量 x 在 D 内变化时，$f(x)$ 的变化趋势．考虑到函数定义域的各种形式，自变量 x 的变化形式有以下 6 种情况．

（1）当 $x>x_0$ 时，x 趋于 x_0，简记为 $x\to x_0^+$；

（2）当 $x<x_0$ 时，x 趋于 x_0，简记为 $x\to x_0^-$；

（3）当 $x\neq x_0$ 时，x 趋于 x_0，简记为 $x\to x_0$；

（4）x 沿数轴正方向趋于无穷大，简记为 $x\to+\infty$；

（5）x 沿数轴负方向趋于无穷大，简记为 $x\to-\infty$；

（6）$|x|$ 趋于无穷大，简记为 $x\to\infty$．

为了叙述方便，统一用记号 $x\to a$ 表示上述 6 种极限过程中的任意一种．

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 有定义，如果当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 无限趋于一个常数 A，即 $|f(x)-A|$ 趋于 0，则称当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 收敛于 A，或称 A 是 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，或 $f(x)\to A$（$x\to a$）；否则称 $f(x)$ 在 $x\to a$ 时发散，或 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 不存在．

因此，有下述一些极限．

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$；$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\triangleq f(x_0^+)$ 右极限；$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\triangleq f(x_0^-)$ 左极限；$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$．除 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 之外，其他 4 种统称为单侧极限．

定理 1.7　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)$．

【例 1】证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在．

证　$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

左、右极限存在，但不相等，由定理 1.7 可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在．

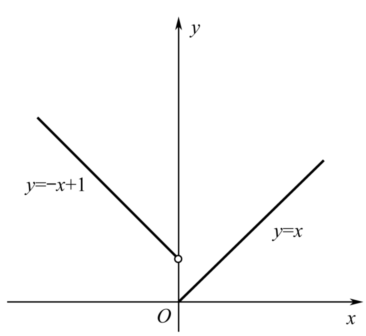


图 1.15

【例 2】设 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x+1, & x<0\end{cases}$．

讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在（见图 1.15）．

解　$x=0$ 是函数定义域中两个区间的分界点，且
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(-x+1)=1$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x=0$$
即有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

1.4.2　函数极限的性质

定理 1.8（极限的唯一性）若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，则极限唯一.

定理 1.9（局部有界性）如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 存在点 a 的某个空心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$，则 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 一定有界.

定理 1.10（局部保号性）如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 且 $A > 0$（或 $A < 0$），那么存在常数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，有 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

定理 1.11 如果 $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$（$A$ 可以是无穷大）且 $g(x) \neq A$，$\lim\limits_{x \to A} f(x) = B$，则 $\lim\limits_{x \to a} f\left[g(x)\right] = B$.

函数极限有如下运算法则.

如果 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$，$c$ 为常数，则：

（1）$\lim\limits_{x \to a}\left[cf(x)\right] = c\lim\limits_{x \to a} f(x) = cA$

（2）$\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$

（3）$\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = AB$

（4）$B \neq 0$，$\lim\limits_{x \to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$

1．确定型极限

方法：直接代入.

【例 3】 求 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{2x+1}{x+1}$.

解　因为分母极限 $\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = \lim\limits_{x \to 1} x + 1 = 2$，分子极限 $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = \lim\limits_{x \to 1}(2x) + 1 = 2 + 1 = 3$，所以 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{2x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$.

这种极限称为确定型极限，求这类极限时，只须将 $x = a$ 代入 $f(x)$ 即可.

【例 4】 求 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+9}{2x+3}$.

解　$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+9}{2x+3} = \dfrac{10}{5} = 2$

2．不确定型极限

1）$\dfrac{0}{0}$ 型极限

方法：（1）分解因式，消除零因子；

（2）根式有理化，消除零因子（此法用在有根式的 $\dfrac{0}{0}$）.

【例 5】求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

解　分母 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，分子 $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)=0$.

这种分子、分母的极限都是 0 的极限，称为 $\dfrac{0}{0}$ 型.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

【例 6】求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

【例 7】求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

解　这是有根式的 $\dfrac{0}{0}$，因此要用有理化.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

【例 8】求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+9}-3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

2）$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型极限

【例 9】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x+1}{2x^3+x+3}$.

解　这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型. 分子、分母都除以最高次项 x^3，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x+1}{2x^3+x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{1}{2}$$

下面是更常用的公式

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & k<m\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=m\\ \infty, & k>m\end{cases}$$

3．其他类型（如 $\infty-\infty$ 型极限）

方法：通分或有理化转化成 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

【例 10】求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}=2$

【例 11】求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1$

【例 12】求 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})&=\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}\\&=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)\cdot\dfrac{1}{x}}{(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1})\cdot\dfrac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to +\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

【例 13】函数 $y=\sqrt{x^2+1}-x$，考察 $x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to\infty$ 时的三种极限.

解　（1）$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 是 $(+\infty)-(+\infty)$ 型，因此有

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

（2）$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 是 $(+\infty)-(-\infty)=+\infty$，确定型，因此有

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=+\infty$$

（3）$\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 是 $(+\infty)-(\infty)$ 型.

由（1）、（2）可知 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 不存在.

加 油 站

【例 14】求 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2(1-3x)^3}{(3x+1)^5}$.

解　由公式可知分子最高次 x^5 的系数为 -3^3，分母最高次 x^5 的系数为 3^5，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(1-3x)^3}{(3x+1)^5}=-\frac{1}{9}$$

【例 15】求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{2}$

【例 16】求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$，$n\in\mathbf{N}$.

解　因为 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，所以有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+\cdots+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+\cdots+x+1)=n$$

【例 17】设 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ a+\mathrm{e}^x, & x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=b$，求 a、b 的值.

解　$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+\mathrm{e}^x)=a+1$

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=b$，所以 $1=a+1=b\Rightarrow a=0$、$b=1$.

【例 18】设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}1, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求：

（1）$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to0}g(x)$.

（2）$f[g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]$.

（3）$g[f(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to1}g[f(x)]$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$

（2）$f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)\neq1\\ 0, & g(x)=1\end{cases}=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq0\end{cases}$；$\lim\limits_{x\to0}f[g(x)]=0$

（3）$g[f(x)]=\begin{cases}1, & f(x)\neq0\\ 0, & f(x)=0\end{cases}=\begin{cases}1, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$；$\lim\limits_{x\to1}g[f(x)]=1$

【例 19】已知 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=-5$，求 a、b 的值.

解　方法一：$x\to2$，分母 $x-2\to0$，而极限存在，故分子 $x^2+ax+b\to0$（否则 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$ 不存在，与已知矛盾），于是 x^2+ax+b 必可分解成 $x^2+ax+b=(x-2)(x-c)$，则

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-c)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-c)=-5\Rightarrow c=7$$

可得 $x^2+ax+b=(x-2)(x-7)=x^2-9x+14$，由两个多项式相等系数比相等可知 $a=-9$，$b=14$.

方法二：$x\to2$，分母 $x-2\to0$，而极限存在，故分子 $x^2+ax+b\to0$（否则 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}$

不存在，与已知矛盾）.

由 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=0 \Rightarrow 4+2a+b=0$， $b=-2a-4$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}&=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{x-2}\\&=4+a=-5\end{aligned}$$

因此 $a=-9$， $b=14$.

习　题　1.4

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4}=$__________.

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+1}-1}=$__________.

3．$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2}=$__________.

4．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x^2-1}=$__________.

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x)^7-1}{(1-x)^8-1}=$__________.

6．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x-1}-ax-b\right)=0$，则 $a=$________、$b=$______.

7．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ 1, & x=0\\ \ln(x+1)+a, & x>0\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=b$，则 $a=$_______、$b=$______.

8．设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+3}{x-1}=b$，则 $a=$_______、$b=$________.

9．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^{10}(2x+1)^{20}}{(2x-3)^{30}}=$__________.

10．$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=$__________.

二、单项选择题

1．$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{2-x}$ 为（　　）.

A．-1　　B．1　　C．0　　D．不存在

2．已知 $f(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

3．下列结论正确的是（　　）．

A．$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$　　B．$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-1$

C．$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\pm1$　　D．$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$不存在

4．设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}=3$，则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{f(3x)}=$（　　）．

A．$\dfrac{2}{9}$　　B．$\dfrac{1}{9}$　　C．0　　D．无法确定

三、计算题

1．求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8-x^3}{x^2-4}$；　（2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$；　（3）$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$；

（4）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x}$；　（5）$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$；　（6）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^n}{x^m}$（$n,m\in\mathbf{N}$）；

（7）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-x}$．

2．设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+ax+1}{x+1}+bx+2\right)=4$，求$a$、$b$的值．

3．设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}, & x<1\\ a-1+\mathrm{e}^{x-1}, & x>1\end{cases}$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=b$，求$a$、$b$的值．

1.5　无穷小与无穷大

有两种极限是数学理论研究和处理实际问题时经常遇到的，这就是本节要介绍的无穷大和无穷小的概念，尤其是无穷小的概念非常有用．

1.5.1　无穷小

定义 1.9　如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称$f(x)$为在$x\to x_0$时的无穷小，特别地，当$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$时，称$a_n$为在$n\to\infty$时的无穷小．

注意：不要把无穷小与很小的常数混为一谈，常数只有0才是无穷小，其余任何一个非0常数，无论多么小，都不是数学中的无穷小．

例如，当$x\to2$时，$y=2x-4$是无穷小，因为$\lim\limits_{x\to2}(2x-4)=0$．

当$x\to\infty$时，$y=\dfrac{1}{x}$也是无穷小，因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$．

定理 1.12　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的充要条件是$f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

无穷小的性质：

（1）两个无穷小的代数和仍是无穷小.

（2）有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

（3）常数与无穷小的积仍是无穷小.

（4）两个无穷小的积仍是无穷小.

（5）有限个无穷小的积仍是无穷小.

（6）有界变量与无穷小的积仍是无穷小.

注意：性质（2）、（5）不能推广到无限个.

【例 1】求 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界量，而 $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$，所以由性质（6）可知 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

【例 2】求 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\sin x$.

解　因为 $\sin x$ 是有界量，而 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$，所以由性质（6）可知 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}\sin x = 0$.

1.5.2　无穷小的阶的比较

当 $x\to 0$ 时，x^4 与 x 相比，谁趋近 0 的速度快呢？为了比较两个无穷小谁趋近 0 的速度快，引进以下 5 个概念.

定义 1.10　$\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$，$\lim\limits_{x\to x_0} \beta = 0$.

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是 β 的高阶无穷小，记作 $\alpha = o(\beta)$.

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = C \neq 0$，则称 α 是 β 的同阶无穷小.

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = C \neq 0$，$k > 0$，则称 α 是 β 的 k 阶无穷小.

（4）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

（5）如果 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$，则称 α 是 β 的低阶无穷小.

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $C = 1$.

注意：两个无穷小除了以上 5 种情形外，还有不能相比的情况.

定理 1.13　设 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证　$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\alpha'}\cdot\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\dfrac{\beta'}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$

【例 3】$x\to 0$，$\sqrt{1+x^2}-1$ 与 x 相比是（　　）无穷小.

解　$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = 0$

所以$\sqrt{1+x^2}-1$是x的高阶无穷小，即$\sqrt{1+x^2}-1=o(x)$.

【例 4】设$x\to 0$，$\sqrt{1+kx}-1\sim x$，则$k=$（　　）.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+kx}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{x\left(\sqrt{1+kx}+1\right)}=\dfrac{k}{2}=1$，所以$k=2$.

【例 5】设$x\to\infty$，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}\sim\dfrac{1}{2x+1}$，求$a$、$b$、$c$的值.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{ax^2+bx+c}}{\dfrac{1}{2x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{ax^2+bx+c}=1$. 由公式（1.1）可知，$a=0$，$b=2$，$c$为任意常数.

【例 6】设$x\to\infty$，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}=o\left(\dfrac{1}{2x+1}\right)$，求$a$、$b$、$c$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{ax^2+bx+c}}{\dfrac{1}{2x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{ax^2+bx+c}=0$. 由公式（1.1）知，$a\neq 0$，$b$、$c$为任意常数.

1.5.3　无穷大

定义 1.11　无穷小$\alpha(\neq 0)$的倒数，称为无穷大.

如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$，即$x\to 0$时，$\dfrac{1}{x}$是无穷大.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$，即$x\to 1$时，$\dfrac{1}{(x-1)^2}$是正无穷大.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-1}{(x+1)^2}=-\infty$，即$x\to -1$时，$\dfrac{-1}{(x+1)^2}$是负无穷大.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$.

无穷大的性质：

（1）两个同号的无穷大之和仍是无穷大.

（2）有限个同号的无穷大之和仍是无穷大.

（3）非零常数乘以无穷大仍是无穷大.

（4）两个无穷大的积仍是无穷大.

（5）有限个无穷大的积仍是无穷大.

无穷大的性质与无穷小的性质有些不同，但性质（2）、（5）仍然不能推广到无限个.

无穷大也有阶的比较，由于不太重要，所以就不介绍了.

【例 7】当$x\to 0$，下列各量哪个是无穷小，哪个是无穷大，哪个既不是无穷小，也不是无穷大？

（1）$\sin x$；　（2）$\tan x$；　（3）$\cot x$；　（4）$\sin\dfrac{1}{x}$；　（5）$\ln x^2$；

（6）$e^{\frac{1}{|x|}}$；　（7）$e^{-\frac{1}{|x|}}$；　（8）$e^{\frac{1}{x}}$；　（9）$\arctan x$；　（10）$\operatorname{arccot} x$；

（11）$\arcsin x$；　（12）$\arccos x$.

解　（1）$\because \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\therefore \sin x$ 是无穷小（$x\to 0$）.

（2）同理，$\tan x$ 是无穷小（$x\to 0$）.

（3）$\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$ 是无穷大（$x\to 0$）.

（4）$\because$ 当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $[-1,1]$ 之间摆动.

$\therefore \sin\dfrac{1}{x}$ 既不是无穷小，也不是无穷大，而是一个有界量.

（5）$\because \lim\limits_{x\to 0}\ln x^2=\infty$，$\therefore \ln x^2$ 是无穷大（$x\to 0$）.

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{|x|}}=e^{+\infty}=+\infty$.

（7）$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{|x|}}=e^{-\infty}=\dfrac{1}{e^{+\infty}}=0$.

（8）由（6）、（7）可知，当 $x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 既不是无穷大，也不是无穷小.

（9）$\because \lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0$，$\therefore \arctan x$ 是无穷小（$x\to 0$）.

（10）$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

（11）$\because \lim\limits_{x\to 0}\arcsin x=0$，$\therefore \arcsin x$ 是无穷小（$x\to 0$）.

（12）$\lim\limits_{x\to 0}(\arccos x)=\dfrac{\pi}{2}$.

【例 8】 $x\to\infty$，下列各量哪个是无穷小，哪个是无穷大，哪个既不是无穷小，也不是无穷大？

（1）$\sin\dfrac{1}{x}$；　（2）$\tan\dfrac{1}{x}$；　（3）$\dfrac{1}{\sin x}$；　（4）$\ln|x|$；　（5）$e^{|x|}$；

（6）$e^{-|x|}$；　（7）e^{x}；　（8）$\arctan|x|$；　（9）$\operatorname{arccot}|x|$.

解　（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\tan\dfrac{1}{x}=0$.

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sin x}$ 不存在，既不是无穷小，也不是无穷大.

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\ln|x|=+\infty$.

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}e^{|x|}=e^{+\infty}=\infty$.

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-|x|}=e^{-\infty}=0$.

（7）由（5）、（6）可知，当 $x\to\infty$ 时，e^{x} 既不是无穷大，也不是无穷小.

（8）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}|x|=\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0$.

加 油 站

【例 9】若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=k$ （$k\neq0$），则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(kx)}{3x}=$________.

解　方法一：$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=k$ （$k\neq0$），$\therefore f(x)=kx+o(x)$，于是 $f(kx)=k(kx)+o(kx)$，得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(kx)}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{k^2x+o(kx)}{3x}=\frac{1}{3}k^2$$

方法二：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(kx)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(kx)}{kx}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot k=\dfrac{1}{3}k\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(kx)}{kx}=\dfrac{1}{3}k^2$

【例 10】设 $x\to0$，$\sqrt{4+kx}-2\sim\dfrac{1}{2}x$，则 $k=$_______.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+kx}-2}{\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{kx}{\frac{1}{2}x\left(\sqrt{4+kx}+2\right)}=\dfrac{1}{2}k=1$，所以 $k=2$.

【例 11】$x\to0$，下列选项中（　　）与 $x+2x^2+3x^3$ 是等价无穷小.

A．$3x^3$　　　B．$2x^2$　　　C．x　　　D．以上都不是

解　$\because\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2+x^3}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+x^2\right)=1$，$\therefore$选 C.

习　题　1.5

一、填空题

1．$x\to0$，$\sqrt{x+1}-1$ 与 x 相比是______________无穷小.

2．$x\to+\infty$，$\sqrt{x^2+1}-x$ 与 $\dfrac{1}{2x}$ 相比是______________无穷小.

3．$x\to\infty$，$\dfrac{1}{x^2+x}$ 与 $\dfrac{1}{x^2}$ 相比是______________无穷小.

4．$x\to\infty$，$\dfrac{1}{x^2+x+1}$ 与 $\dfrac{1}{x^3}$ 相比是______________无穷小.

二、单项选择题

1．当 $x\to0$ 时，下列各量与 x 相比，（　　）是 x 的等价无穷小.

A．$\sqrt{2+x}-2$　　　B．$2x^2+x$　　　C．$3x^3-x$　　　D．$-x$

2．设 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x}-1\sim ax$，则 $a=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}$　　　B．1　　　C．2　　　D．$\dfrac{1}{4}$

3．当 $x\to0$ 时，$1-\cos x$ 与 $\sin x$ 相比是（　　）无穷小.

A．等价　　　B．同阶非等价　　　C．高阶　　　D．低阶

4．欲使 $\dfrac{x\left(x^2-1\right)}{x^3-1}$ 是无穷小，须 $x\to x_0$， x_0 有① $x_0=0$，② $x_0=1$，③ $x_0=\infty$，④ $x_0=-1$，正确的是（　　）．

A．①②　　B．①②③　　C．①②③④　　D．①③

三、计算题

1．求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x}{x^2+x+1}\cdot\sin\left(100x^{100}+1\right)\right]$．

2．当 $x\to1$ 时，$k\left(\sqrt{3x+1}-2\right)\sim x-1$，求 k 值．

3．当 $x\to0$ 时，$x\sim f(x)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{f(x)}$．

1.6　两个重要极限

下面两个定理引出两个重要极限．

定理 1.14　（两边夹定理或夹逼准则）当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>M$）时，$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

特别是数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ 满足从某项开始，当 $n>n_0$ 时，有 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$．

作为两边夹定理的应用，下面证明一个重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{1.2}$$

证　在如图 1.16 所示的四分之一的单位圆中，设圆心角 $\angle AOB=x$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又作 $BC\perp OA$，则 $\sin x=CB$，$x=\overset{\frown}{AB}$，$\tan x=AD$，因为 $S_{\triangle BOC}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle AOD}$，所以 $\dfrac12\sin x<\dfrac12x<\dfrac12\tan x$，$\sin x<x<\tan x$，不等式各边都除以 $\sin x$ 得：

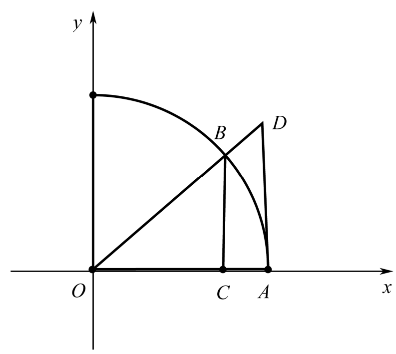


图 1.16

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\text{ 或 }\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

因为 x 用 $-x$ 代替时，$\cos x$ 与 $\dfrac{\sin x}{x}$ 都不变，所以上面的不等式对于 $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 内的 x 也是成立的．

$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to0}1=1$，由两边夹定理可知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，则公式（1.2）的实质为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\Delta}{\Delta}=1 \tag{1.3 *}$$

即 $x\to x_0$，分母 $\Delta\to0$，而分子恰好是 $\sin\Delta$，此时 $\sin\Delta$ 中的 Δ 与分母 Δ 是一模一样的．

【例 1】 计算 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}$．

解　由公式（1.3 *）可知 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}=1$.

【例 2】计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)\sin(x^2-1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\sin(x^2-1)}{x^2-1}=2$

【例 3】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=1$.

【例 4】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2x}=2$

【例 5】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\overset{\arcsin x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$

【例 6】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\overset{\arctan x=t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\tan t}=1$

当 $x\to 0$ 时，由上述例题结果可知 $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$.
因此，当 $x\to x_0$ 时，$\Delta\to 0$，a 为常数，则 $a\Delta\sim\sin(a\Delta)\sim\tan(a\Delta)\sim\arcsin(a\Delta)\sim\arctan(a\Delta)$.

【例 7】计算 $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

解　令 $t=x-\pi$，则当 $x\to\pi$ 时，$t\to 0$，故

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=-1$$

【例 8】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\sin x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$（$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 有界函数），所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sin x+x\sin\frac{1}{x}\right)=1$$

【例 9】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\sin x+x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$（$|\sin x|\leqslant 1$），$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\sin x+x\sin\frac{1}{x}\right)=1$$

定理 1.15　单调有界数列一定有极限.

此定理的几何直观是十分明显的.

作为定理 1.15 的应用，介绍另一个重要极限：

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e} \tag{1.4}$$

不进行证明，要求各位记住公式（1.4）.

公式（1.4）的实质是

$$\lim_{\Delta\to 0}(1+\Delta)^{\frac{1}{\Delta}}=\mathrm{e}$$

此公式的底是$1+$无穷小Δ，而指数恰好是此Δ的倒数无穷大.

【例 10】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^3=\mathrm{e}^3$

【例 11】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5}=\mathrm{e}^5$

综上，有 $\lim\limits_{x\to x_0}(1+a\Delta)^{\frac{b}{\Delta}}=\mathrm{e}^{ab}$.

例如，$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^6$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)^n=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

【例 12】计算 $\lim\limits_{x\to\pi}(1+\sin x)^{\csc x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\pi}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}=\mathrm{e}$

【例 13】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.

解　方法一：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right]^{\frac{4x}{2x-1}}=\mathrm{e}^2$

方法二：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x}=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}}=\mathrm{e}^2$

显然方法二更灵活.

【例 14】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2}=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2}=\mathrm{e}^{-1}$

【例 15】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\mathrm{e}=1$

综上，有当 $x\to0$ 时，$x\sim\ln(1+x)$.

【例 16】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$.

解　设 $\mathrm{e}^x-1=t$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1$$

综上，有当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-1\sim x$.

小结：当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim\mathrm{e}^x-1$.

当 $x\to x_0$ 时，$\Delta\to0$，a 为常数，有

$$a\Delta\sim\sin(a\Delta)\sim\tan(a\Delta)\sim\arcsin(a\Delta)\sim\arctan(a\Delta)\sim\ln(1+a\Delta)\sim\mathrm{e}^{a\Delta}-1$$

例如，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\mathrm{e}^{-x}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{-x}=-2$.

注意：分子、分母都是乘积时，才可将一个因子用等价无穷小来代替；分子、分母是和差时，绝对不允许用等价无穷小来代替.

加 油 站

【例 17】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x\cdot\ln(1-2x^2)}{(\mathrm{e}^{-6x}-1)\tan\left(\dfrac{4}{3}x^2\right)}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x\cdot\ln(1-2x^2)}{(\mathrm{e}^{-6x}-1)\tan\left(\dfrac{4}{3}x^2\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\cdot(-2x^2)}{(-6x)\cdot\dfrac{4}{3}x^2}=1$

【例 18】计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$.

解　因为 $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\dfrac{x^2}{4}}{\dfrac{1}{2}x^2}=1$$

【例 19】计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$.

解　当 $n\to\infty$时，有 $\dfrac{\pi}{n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=\pi$.

【例 20】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin x)}{\arcsin x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2\sin x)}{\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2$

【例 21】计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 4x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$

【例 22】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{-1}}\right]^{\frac{-1}{x}}=e^0=1$

【例 23】计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x=e^{-\infty}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x=e^{+\infty}=\infty$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ 不存在.

【例 24】证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

证　$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$$

由两边夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

【例 25】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

解　设 $x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}$，令 $k=0,1,2,\cdots,n$，有

$$0<\frac{1}{n^2+k}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

故 $0<x_n\leqslant\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，由两边夹定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

【例 26】求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.

解　设 $x_n=\frac{n!}{n^n}$，有

$$0<x_n=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{n}{n}\leqslant\frac{1}{n}\cdot1\times1\times\cdots\times1=\frac{1}{n}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，因此由两边夹定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$

【例 27】已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-1}\right)^x=1$，求 c 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^c}{e^{-1}}=e^{c+1}=1$，所以 $c=-1$.

【例 28】计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0$，这样解是错误的（$\tan x-\sin x$ 是减法，不可以用等价替换），正确的解法应为

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$$

【例 29】计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln a}{x}=\ln a$

【例 30】计算 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$（$a>0$，$b>0$，$c>0$）.

解　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}\right)^{\frac{3}{a^x+b^x+c^x-3}\cdot\frac{a^x-1+b^x-1+c^x-1}{3x}}$$

由例 29 知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$，所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)}=\sqrt[3]{abc}$$

【例 31】 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{4}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{4}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{4}{x}=4$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$，所以 $\sin\dfrac{4}{x}\sim\dfrac{4}{x}$.

【例 32】 证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=1$（$\alpha\neq0$）.

证 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{\alpha x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha x}{\alpha x}=1$

【例 33】 计算 $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=2\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2^x}\right)^{\frac{2^x}{x}}\right]^{\frac{1}{2^x}}=2e^1=2e$

下面列出一些常见的等价无穷小.

当 $x\to0$ 时，有：

（1）$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$.

（2）$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

（3）$a^x-1\sim x\ln a$.

（4）$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

（5）$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$.

例如，当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1-4x^2}-1\sim\dfrac{-4}{2}x^2=-2x^2$.

习　题　1.6

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+1)x}{x}=2$，则 $a=$__________.

2．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(a+1)x}{\tan(2a-3)x}=1$，则 $a=$________.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\tan\dfrac{\pi}{4^n}=$______________.

4．$\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin2x}{x}\right)=$____________.

5．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=$__________.

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}=$_____________.

7．$\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}=$______________.

8．$\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}$____________.

9．$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\ln(x-1)-\ln x\right]=$______________.

10．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}=$____________.

二、单项选择题

1．$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin\left(x^3+1\right)}{x+1}=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2c}{x+1}\right)^{x}=\mathrm{e}$，则 $c=$（　　）.

A．$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$　　B．1　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．e

3．设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时，有（　　）.

A．$f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　B．$f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小

C．$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小　　D．$f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

4．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+5x}-1}{x}=$（　　）.

A．1　　B．0　　C．-1　　D．2

5．$\lim\limits_{x\to\infty}2x\sin\dfrac{3}{x}=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．6　　D．0

6．$\lim\limits_{x\to0}x\cot x=$（　　）.

A．1　　B．0　　C．2　　D．不存在

7．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}=$（　　）.

A．1　　B．0　　C．2　　D．不存在

8．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=$（　　）.

A．1　　B．0　　C．2　　D．不存在

三、计算题

1．求下列极限．

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{2-2x}\right)^{x}$；　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\ln(1+2x)}$；　（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sin x}{2x-\sin x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$；　（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{(e^{x}-1)\ln(1+x)}$；（6）$\lim\limits_{x\to 0}(\csc x-\cot x)$；

（7）$\lim\limits_{x\to 0}x\arctan\dfrac{2}{x}$；　（8）$\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}$；　（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$；

（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$．

2．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$ （$|x|<1$）．

3．计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x-3}$．

4．计算 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ （$a>0$）．

5．计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}$．

6．计算 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+3^{x})}{\ln(1+2^{x})}$．

1.7　函数的连续性

在现实世界和自然界中，变量的变化有两种不同的形式——逐渐变化和突然变化，反映到数学上，就是函数的连续与间断，如气温的变化、作物的生长、放射性物质存量的减少等．其特点是当时间的变化很微小时，这些量的变化也很微小，反映在数学上就是函数的连续性．

1.7.1　连续函数的概念与性质

在发射卫星时，随着燃料的消耗，火箭的质量逐渐减少，质量变化是逐渐变化的，当火箭的燃料耗尽时，该级火箭的外壳自动脱落，于是火箭的质量就发生突变．

许多变化过程都有渐变和突变两种现象，在数学上则用函数的连续和间断来描述．

定义 1.12　设函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，或者称 x_0 是 $f(x)$ 的一个连续点．

定义 1.13　如果 $\lim\limits_{x\to x^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续．

定义 1.14　如果 $\lim\limits_{x\to x^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续．

结论： $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处既左连续，又右连续．

【例 1】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2+3, & x\geqslant 0\\ a-x, & x<0\end{cases}$$

问 a 为何值时，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？

解　因为 $f(0)=3$，且

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(a-x)=a$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+3)=3$$

$y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=a=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=3$，故 $a=3$.

定义 1.15　$f(x)$ 在 (a,b) 内每点都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内是连续的.

定义 1.16　$f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在点 $x=a$ 处右连续，在点 $x=b$ 处左连续，称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

连续函数的性质：

（1）设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 处连续，c 为常数，则

① $cf(x)$ 在点 x_0 处连续；

② $f(x)\pm g(x)$ 在点 x_0 处连续；

③ $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续；

④ $g(x_0)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

（2）若 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，$u=g(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $u_0=g(x_0)$，则 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x_0 处连续.

这个性质说明连续函数的复合函数仍为连续函数，并可得出如下结论：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\varphi(x_0)\right]$$

即

$$\lim_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$$

这表示极限符号与复合函数的符号 f 可以交换次序，只要 f 连续即可.

例如，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{x-2}{x-3}$.

解　$y=\arctan u$ 在 $u=1$ 处连续，故

$$\lim_{x\to\infty}\arctan\frac{x-2}{x-3}=\arctan\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x-3}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

想要验证一个函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处是否连续，只须用定义 1.12 看 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否是 $f(x_0)$. 如 $f(x)=x^2$，验证 $f(x)$ 在 $x=3$ 处是否连续，由于 $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9=f(3)$，所以 $f(x)=x^2$ 在 $x=3$ 处连续.

似乎这个问题解决了，但新的问题又来了，人们不能没完没了一点一点去验证，于是需要有个定理来解决这个问题.

定理 1.16　基本初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 1.17　初等函数在其定义区域内都是连续的.

两个定理有一定的差别，定理 1.16 要求函数在其定义域内，而定理 1.17 要求函数在其定义区域内.

例如，$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$ 是初等函数，其定义域为 $x=1$，这个点并没有形成区域，在该点的一个小邻域内，函数 y 除了这点外，在其余的点并没有意义，所以不能满足连续的定义，因此定理 1.17 将这类初等函数给去掉了，要强调定义域必须是区间.

那么，为什么定理 1.16 对于基本初等函数不要求区域了呢，这是因为基本初等函数的定义域本身都是区域.

定理 1.18　单调连续函数的反函数是单调连续函数.

【例 2】求函数 $y=\dfrac{x}{x-1}$ 的连续区间.

解　这类问题就是求函数的定义域，因为函数 y 是初等函数，显然定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，这就是函数 y 的连续区间.

【例 3】求函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{x+1}, & x>1\\ 1, & x=1\\ x+\mathrm{e}^{x-1}, & x<1\end{cases}$ 的连续区间.

解　一般来说，分段函数不是初等函数. 对分段函数，只需验证是否在分段点处连续即可.

因为当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ 是初等函数，故 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 是连续的.

因为当 $x<1$ 时，$f(x)=x+\mathrm{e}^{x-1}$ 是初等函数，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 也是连续的.

只需验证 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性即可. 因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{2x}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(x+\mathrm{e}^{x-1}\right)=2$$

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=2\neq f(1)=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续.

综上，$f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

1.7.2　函数的间断点

定义 1.17　$y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内（x_0 可除外）有定义，如果有下列情况之一:

（1）在 $x=x_0$ 处无定义;

（2）在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{不存在}\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)\end{cases}$，

则称 x_0 为间断点.

间断点的分类

定义 1.18　x_0 是 $y=f(x)$ 的间断点.

（1）$f\left(x_0^-\right)$，$f\left(x_0^+\right)$ 存在，称 x_0 是第一类间断点.

若 $f\left(x_0^-\right)=f\left(x_0^+\right)$，则称 x_0 是第一类可去间断点（或可补间断点）;

若 $f\left(x_0^-\right)\neq f\left(x_0^+\right)$，则称 x_0 是第一类跳跃间断点.

（2）$f\left(x_0^-\right)$ 与 $f\left(x_0^+\right)$ 至少有一个不存在，称 x_0 是第二类间断点.

【例 4】求 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点及其类型.

解　$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处没定义，当 $x\to 0$ 时，函数值在 $[-1,1]$ 内波动，称 $x=0$ 是第二类振荡间断点，如图 1.17 所示.

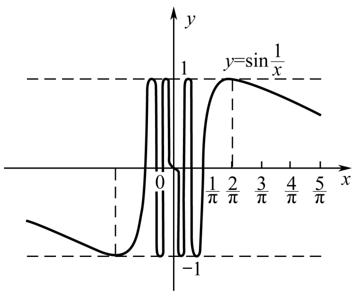


图 1.17

【例 5】求 $y=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ 的间断点及其类型.

解　函数 y 在 $x=\pm 1$ 没有定义.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}$$

因此 $x=-1$ 是第一类可去间断点.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-1}=\infty$$

因此 $x=1$ 是第二类无穷间断点.

【例 6】讨论函数 $y=\begin{cases}2x, x\neq 0\\ 1,\quad x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　由于 $\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}2x=0$，而 $y(0)=1$，由定义知函数 y 在点 $x=0$ 处不连续． $x=0$ 为函数 y 的可去间断点.

若修改函数 y 在 $x=0$ 的定义，令 $y(0)=1$，则函数 $y=\begin{cases}2x, x\neq 0\\ 0,\quad x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续．x=0 为函数 y 的第一类可去（即可补）间断点.

1.7.3　闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续的函数有两个重要性质，就是最值定理和介值定理.

定理 1.19（最值定理）　函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，一定能取到最小值 m 与最大值 M，见图 1.18.

定理 1.20（介值定理）　函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，对于 m 和 M 之间的任意一个数 c（即 $m\leqslant c\leqslant M$ ），至少有一点 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=c$ ，见图 1.19.

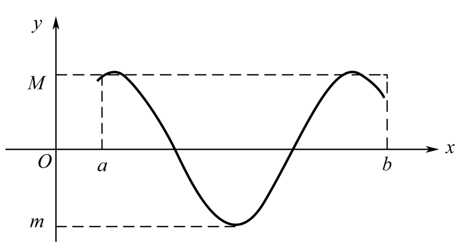


图 1.18

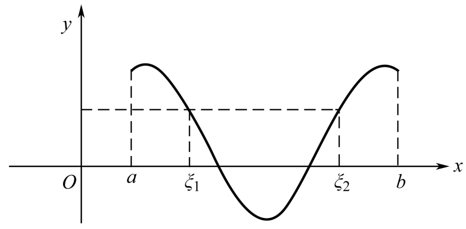


图 1.19

这个定理有一个重要的推论，就是零点定理.

定理 1.21（零点定理）　$y=f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$，则至少有一点 $\xi\in\left(a,b\right)$ 使 $f\left(\xi\right)=0$，如图 1.20 所示.

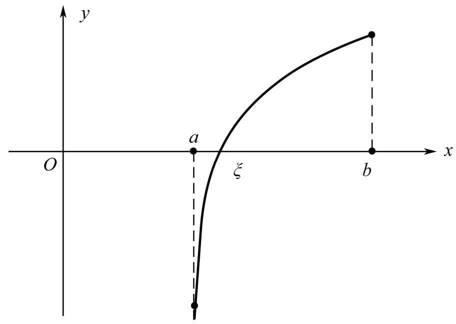


图 1.20

【例 7】证明四次代数方程 $x^4+1=5x^2$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内至少有一个实根.

证　设 $f\left(x\right)=x^4-5x^2+1$. 因为函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续，且 $f\left(0\right)=1, f\left(1\right)=-3$，故 $f\left(0\right)\cdot f\left(1\right)<0$.

根据零点定理知，至少存在一点 $\xi\in\left(0,1\right)$，使 $f\left(\xi\right)=0$，即 $\xi^4-5\xi^2+1=0$.

因此，方程 $x^4+1=5x^2$ 在 $\left(0,1\right)$ 内至少有一个实根 ξ.

加 油 站

【例 8】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2a-1)x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ (1+x)^{\frac{b}{x}}, & x>0\end{cases}$，求 a、b 为何值时 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续.

解　当 $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=f\left(0\right)=a$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，则

$$\lim_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin\left(2a-1\right)x}{x}=2a-1$$

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(1+x\right)^{\frac{b}{x}}=\mathrm{e}^b$$

$$2a-1=\mathrm{e}^b=a$$

所以，当 $\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 9】设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq4\\ a, & x=4\end{cases}$ 且 $f\left(x\right)$ 在其定义域内连续，求 a 的值.

解　$x\in\mathbf{R}$，要使 $f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，只需 $f\left(x\right)$ 在 $x=4$ 处连续即可，即

$$\lim_{x\to0}f\left(x\right)=f\left(4\right)=a$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$$

所以，当 $a=8$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

【例 10】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x}{x}, & x<0\\ a-1, & x=0\\ x\cos\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$，求：

（1）a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续；

（2）b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

解 （1）因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2=f(0)=a-1$，所以当 $a=3$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=a-1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x\cos\dfrac{1}{x}+b\right)=b$，所以

$$a-1=2=b$$

即当 $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 11】 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点，并指出其类型.

解 根据定义域知函数 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=\pm1$ 处无定义.

因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}=\infty$，所以 $x=-1$ 是第二类无穷间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x(x-1)}{-x(x^2-1)}=-1$，而

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{x-1}{x^2-1}=1$$

所以 $x=0$ 是第一类跳跃间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-1)}{|x|(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$，所以 $x=1$ 是第一类可去间断点.

【例 12】 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\text{且}x\neq1\\ \ln(1+x), & -1<x\leqslant0\end{cases}$，求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

解 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的分段点，$x=1$ 无定义.

因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\ln(1+x)=0，\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}^{-1}$$

所以 $x=0$ 是第一类跳跃间断点.

因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}^{-\infty}=0，\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\mathrm{e}^{-\infty}=\infty$$

所以 $x=1$ 是第二类间断点.

【例 13】 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的间断点及其类型.

解　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^2\cdot\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}x^2, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x^2, & |x|>1\end{cases}$，分段点为 $x=\pm1$.

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\left(-x^2\right)=-1$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}x^2=1$$

所以 $x=-1$ 是第一类跳跃间断点.

同理，$x=1$ 是第一类跳跃间断点.

【例 14】证明方程 $\ln(1+e^x)=2x$ 至少有一个小于 1 的正根.

证　设 $f(x)=\ln(1+e^x)-2x$，显然 $f(x)\in C([0,1])$，又

$$f(0)=\ln2>0$$

$$f(1)=\ln(1+e)-2=\ln(1+e)-\ln e^2<0$$

由根的存在定理知，至少存在一点 $x_0\in(0,1)$，使 $f(x_0)=0$，即方程 $\ln(1+e^x)=2x$ 至少有一个小于 1 的正根.

【例 15】　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$、$f(b)>b$，证明至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=\xi$.

证　设 $F(x)=f(x)-x$，$f(x)$ 及 x 都在 $[a,b]$ 上连续，所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$$F(a)=f(a)-a<0,\quad F(b)=f(b)-b>0$$

所以 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足零点定理，至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

习　题　1.7

一、填空题

1．函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & x<0\end{cases}$ 的连续区间是________________.

2．函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x+1}, & x<-1\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<|x|\leqslant1\\ 1, & x>1\end{cases}$ 的间断点及类型是_______________.

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____________.

二、单项选择题

1．设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的（　　）.

A．可去间断点　B．跳跃间断点　C．第二类间断点　D．连续点

2．函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{x\left(x^2-1\right)}$ 的间断点的个数为（　　）.

A．1　B．2　C．3　D．4

3．函数 $f(x)=\dfrac{\left|x\right|\sin(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$ 的第一类可去间断点的个数为（　　）.

A．0　B．1　C．2　D．无数个

三、计算题

1．设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续，求 a、b 的值.

2. 设函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，且 $0\leqslant f\left(x\right)\leqslant 1$. 证明：至少存在一点 $\xi\in\left[0,1\right]$，使 $f(\xi)=\xi$.

3．证明方程 $x\cdot 2^x=1$ 至少有一个小于1的正根.

4．证明方程 $x=a\sin x+b$ ，其中 $a>0$、$b>0$ ，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

5．证明方程 $\ln(1+e^x)=2x$ 至少有一个小于 1 的正根.

本 章 小 结

（1）极限分确定型与不确定型两大类，确定型极限非常简单、好算，可直接代入；不确定型极限分为 7 种（实际上只需记住前两种，因为其他类型可以通过化简转化成这两种类型）.

①$\dfrac{0}{0}$；②$\dfrac{\infty}{\infty}$；③$\infty-\infty$；④$0\cdot\infty$；⑤$1^\infty$；⑥$\left(+\infty\right)^0$；⑦$0^0$.

学习第 4 章时会使用洛必达法则，可以圆满地解决这 7 种不定型的极限问题，但当前只能局部解决①、②、③、⑤这 4 种类型问题，解决⑤必须借助重要公式 $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+a\Delta\right)^{\frac{b}{\Delta}+c}=e^{ab}$，其中 a、b、c 为常数，$x\to x_0$ 时 $\Delta\to 0$.

【例 1】 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\tan x}$，这是$1^\infty$ 型.

解　$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{\tan x}\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to 0}\left(\cos t\right)^{\cot t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\left(1+\cos t-1\right)^{\frac{1}{\cos t-1}}\right]^{\frac{\cos t-1}{\sin t}\cdot\cos t}=1$$

$$\left(\because \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\sin t}\cdot\cos t=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{t^2}{2}}{t}=0\right)$$

（2）无穷小与极限的关系，定理 1.12 是一个非常重要的定理.

【例 2】已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right]=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解　由定理 1.12 知 $\frac{f(x)-1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=2+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)\to 0$（$x\to 0$）.

$f(x)=2x+\frac{\sin x}{x}+1+x\cdot\alpha(x)$，两边取极限，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[2x+\frac{\sin x}{x}+1+x\cdot\alpha(x)\right]=2$.

【例 3】已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax-b\right]=0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

解　由定理 1.12 知 $f(x)-ax-b=0+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

两边除以 x，得 $\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=\frac{\alpha(x)}{x}$，再取极限，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$.

（3）三个重要极限公式.

① $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & k<m\\ \frac{a_0}{b_0}, & k=m.\\ \infty, & k>m\end{cases}$

② $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(a\Delta)}{b\Delta}=\frac{a}{b}$，$x\to x_0$，$\Delta\to 0$，分子、分母中的 Δ 是一样的.

③ $\lim\limits_{x\to x_0}(1+a\Delta)^{\frac{b}{\Delta}+c}=\mathrm{e}^{ab}$，$a$、$b$、$c$ 为常数，$x\to x_0$，$\Delta\to 0$，底与指数中的 Δ 是一样的.

【例 4】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\frac{a-2}{5}\cdot\mathrm{e}^{3a}$，求 a 的值.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2a}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}=\frac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{-a}}=\mathrm{e}^{3a}=\frac{a-2}{5}\mathrm{e}^{3a}$

所以 $\frac{a-2}{5}=1$，$a=7$.

【例 5】若 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$ 存在，且 $f(x)=\frac{2\sin x}{x-\pi}+3\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，求 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$.

解　要想求 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)$，需知道 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin x}{x-\pi}\overset{x=\pi-t}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\sin t}{-t}=-2$.

设 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=A$，两边取极限，则 $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{2\sin x}{x-\pi}+3A\right)$，即 $A=-2+3A$.

所以 $A=\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=1$.

（4）等价无穷小.

当 $x \to 0$ 时：

① $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$；

② $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$；

③ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$；

④ $(1+\beta x)^\alpha - 1 \sim \alpha\beta x$.

【例 6】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-6x}-1}{\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{-x} = 2$.

【例 7】 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\cos\frac{1}{x}-1\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}$.

【例 8】 当 $x\to\infty$ 时，若函数 $f(x)$ 与 $\frac{1}{x}$ 是等价无穷小，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0$.

高等数学中的函数主要是初等函数与分段函数两大类，初等函数只要求出其定义域，就可知道其连续区间了；而分段函数只需研究在分段点处的连续性即可.

（5）函数在闭区间上连续的性质一定要掌握，它是一个重要基础知识.

复 习 题 1

一、填空题

1．函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的__________条件.

2．数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的__________条件.

数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的__________条件.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{2n} =$ __________.

4．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-1}{1-e^{\sin x}}$ __________.

5．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin ax)}{\ln(1+\sin bx)} =$ __________.

6．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^{x^2}-1} =$ __________ .

7．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan(a+1)x}{e^{ax}-1} = 2$，则 $a =$ ________.

8．$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{a}{1-x}}, & x<0 \\ 1+\ln(1+x), & x\geqslant 0 \end{cases}$，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = b$，则 $a =$ ________、$b =$ ________.

9．已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+1)(x+a)}-x\right] = 1$，则 $a =$ ________.

10．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+n}-n^2}{\sqrt[3]{8n^6+1}+n^2} =$ ________.

二、单项选择题

1．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{e^{x-1}}$ 的连续区间是（　　）．

A．$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$(0,1)$

2．当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ 的极限为（　　）．

A．1　　B．2　　C．0　　D．不存在

3．若 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限存在，则（　　）．

A．$f(x_0)$ 必存在且等于极限值　　B．$f(x_0)$ 存在但不一定等于极限值

C．$f(x_0)$ 在 x_0 处的函数值可以不存在　　D．如果 $f(x_0)$ 存在，则必等于极限值

4．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-1}{x-1}=b$，则 a、b 为（　　）．

A．$a=0$、$b=2$　　B．$a=1$、$b=0$　　C．$a=0$、$b=1$　　D．$a=1$、$b=2$

5．若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$、$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则必有（　　）．

A．$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=\infty$　　B．$\lim\limits_{x\to x_0}[kf(x)]=\infty$，$k$ 为常数

C．$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$　　D．$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty$

6．若 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$（　　）．

A．1　　B．0　　C．2　　D．不存在

7．函数 $f(x)=\sqrt{x(x-3)}+\dfrac{x^2-1}{(x+1)(x-2)}$ 的间断点的个数为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．下列极限不正确的是（　　）．

A．$\lim\limits_{x=0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$　　B．$\lim\limits_{x=0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$　　C．$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$　　D．$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}=\infty$

9．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=$（　　）．

A．2^2　　B．e^{-2}　　C．1　　D．不存在

10．设 $x_n=\dfrac{n}{2}\left[1+(-1)^n\right]$，则（　　）．

A．$\{x_n\}$ 有界　　B．$\{x_n\}$ 无界

C．$\{x_n\}$ 单调增加　　D．$\{x_n\}$ 为无穷大（$n\to\infty$）

三、计算题

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{1}{x}}}$．

2．计算 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$．

3．计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$．

4．计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]$（$0<\alpha<1$）．

5．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$．

6．求 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$ 的连续区间．

7．如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2}{x-1}-ax+b\right)=4$，求 a、b 的值．

8．计算 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$．

9．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$．

10．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin^2 x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$．

11．已知 $f(x)=\sqrt{x}$，求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$．

12．a 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\,a\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>a\end{cases}$ 连续．

第 2 章　导数与微分

导数与微分是微分学的两个重要概念。高等数学的主要任务就是研究函数的各种性态及函数值的计算或近似计算，导数与微分是解决这些问题的普遍的、有效的工具。本章以极限为基础，引进导数与微分的定义，建立导数与微分的计算方法.

2.1　导　　数

2.1.1　问题的提出

问题 1　已知曲线 $y=f\left(x\right)$，点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线上一点，求过点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的切线方程.

分析　如果知道过点 $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ 的切线斜率为 k，那么切线方程公式为 $y-f\left(x_0\right)=k\left(x-x_0\right)$，如何求其斜率 k 呢？

取曲线上另一点 $\left(x_0+\Delta x, f\left(x_0+\Delta x\right)\right)$，这两点的割线斜率为 $\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$（见图 2.1）.

当 $\Delta x\to 0$ 时，割线斜率的极限位置就是曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(x_0，f\left(x_0\right)\right)$ 的斜率，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=k$$

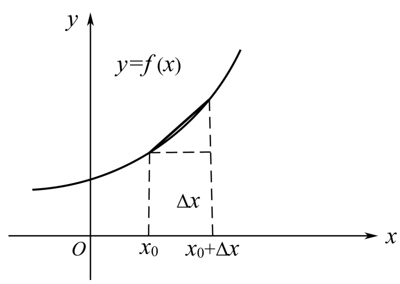


图 2.1

问题 2　求变速直线运动的物体的瞬时速度.

假定物体做直线运动，移动的距离 s 是时间 t 的函数 $s=s\left(t\right)$，求物体在时刻 t_0 的瞬时速度.

分析　用 Δt 表示很短的一个时间间隔 $\left(\Delta t\neq 0\right)$，在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这一段时间内，物体移动的距离为 $s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)$，于是这段时间的平均速度就是 $\overline{v}=\dfrac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t}$.

这个平均速度并不等于物体在时刻 t_0 的瞬时速度，当 Δt 越小时，这个平均速度 $\overline{v}$ 就越接近物体在 t_0 时刻的瞬时速度 $v\left(t_0\right)$，于是令 $\Delta t\to 0$，有

$$v\left(t_0\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s\left(t_0+\Delta t\right)-s\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

问题 3　求质量分布非均匀的细杆的线密度.

设有一根直线状的细杆，由于很细，可以不计其横截面积，如果在杆的任何长度相等的两段上都有相同的质量，那么这个细杆的质量就是均匀分布的，这时，细杆的线密度等于 $\rho=\dfrac{M}{l}$，

其中 M 是细杆的质量，l 是细杆的长度．

分析　质量分布均匀的细杆只是一种理想化的情况，在许多实际问题中，细杆的质量不是均匀分布的，它的线密度不是常量，而是一个变量．为了更好地研究质量分布非均匀的细杆的线密度，将细杆放在 x 轴正方向上，使其左端点位于原点处（见图 2.2）．

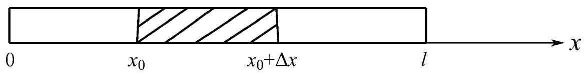


图2.2

设细杆长度为 l，用 $m(x)$ 表示细杆分布在区间 $[0,x]$（$0\leqslant x\leqslant l$）上的质量，为了求细杆在点 x_0（$0\leqslant x_0\leqslant l$）处的线密度 $\rho(x_0)$，先研究细杆在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 这一小段上的质量 $\Delta m=m(x_0+\Delta x)-m(x_0)$（$\Delta x>0$），从而可求出在这小段上的平均线密度为

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

Δx 越小，$\bar{\rho}$ 就越接近 $\rho(x_0)$，因此令 $\Delta x\to 0$，将其极限作为 $\rho(x_0)$，于是

$$\rho(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{m(x_0+\Delta x)-m(x_0)}{\Delta x}$$

现在放弃了它们的几何意义、物理意义，而抽象地用数学定义来刻画其本质问题．

2.1.2　导数的概念

定义 2.1　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 有定义．

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，而且称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$．即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

（1）导数的几何意义．$f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 过其上一点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线斜率，因此过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$．

过点 $(x_0,f(x_0))$ 的法线方程为 $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$．

应用这个公式时，一定先验证点 (x_0,y_0) 是否在曲线上．

（2）可导必连续，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$．

由于分母 $\Delta x\to 0$，而极限存在，所以分子一定趋于 0，于是可导 $\Rightarrow$ 连续；反之未必．

（3）$f(x)=|x|$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下面讨论它在 $x=0$ 处的导数．

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但在 $x=0$ 处不可导（见图 2.3）．

由图 2.3 可知曲线 $y=|x|$，在点 $(0,0)$ 处是一个尖点，于是有曲线在尖点处连续且不可导的

结论．当函数有绝对值，且绝对值为 0 时，可能出现尖点，如 $y=\left|x^2-1\right|$， $x=\pm1$ 就出现尖点，如图 2.4 所示．

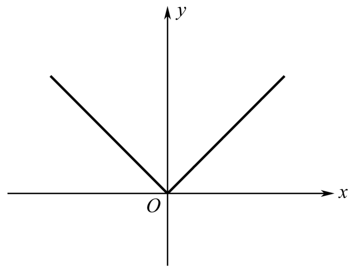


图 2.3

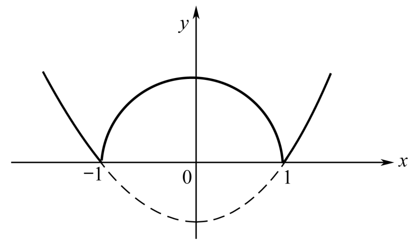


图 2.4

（4）若 $f'\left(x_0\right)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+a\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}=af'\left(x_0\right)$．

（5）若 $f'\left(x_0\right)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x_0+a\Delta x\right)-f\left(x_0+b\Delta x\right)}{\Delta x}=\left(a-b\right)f'\left(x_0\right)$．

（6）导数的其他形式

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

特别地，当 $x_0=0$， $f\left(0\right)=0$ 时， $f'\left(0\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}$．如果 $f\left(0\right)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=2$ ，则过点 $\left(0,0\right)$ 的切线方程为 $y=2x$．

记 $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$，$\Delta y$ 称为函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处的增量，于是 $f'\left(x_0\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$．

（7）路程 $s=s\left(t\right)$ 对时间 t 的导数 $s'\left(t\right)$ 就是速率（严格说速度是一个矢量，既有大小，又有方向，而速率只是数值大小）．

定义 2.2　如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限值为函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处的左导数，记作 $f'_-\left(x_0\right)$．

定义 2.3　如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$ 存在，则称该极限值为函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处的右导数，记作 $f'_+\left(x_0\right)$．

函数的左导数与右导数统称为单侧导数．

定理 2.1　函数 $f\left(x\right)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f'_-\left(x_0\right)=f'_+\left(x_0\right)$

【例 1】求函数 $f(x)=C$ （C 为常数）的导数．

解　$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$，即 $(C)'=0$．

【例 2】求函数 $y=x^n$ （n 为正整数）的导数．

解　$(x^n)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}]=nx^{n-1}$

即 $(x^n)'=nx^{n-1}$．

【例 3】 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x^3, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处是否可导？若可导，求 $f'(0)$．

解　考察 $x=0$ 处的左、右导数:

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\Delta x=0$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}(\Delta x)^2=0$$

所以，函数在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$．

【例 4】 讨论 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$，求 a、b 为何值时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导.

解　$f'(1)$ 存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=1$ 处一定连续.

（1） $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax+b)=a+b$，所以 $a+b=2$．只要 $a+b=2$，$f(x)$ 在 $x=1$ 处一定连续，这样的 a、b 有无数个，但连续未必可导.

（2）可导.　$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-2}{\Delta x}$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{(1+\Delta x)+1-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1 \\ \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a(1+\Delta x)+b-2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{a\Delta x}{\Delta x}=a \end{cases}$$

所以得 $a=1$，且 $a+b=2$，故得 $b=1$．

当 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 可导，且 $f'(1)=1$．

加 油 站

【例 6】 讨论 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解　因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0=f(0)$$

$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x^2}}{\pm|x|}$ 不存在，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

【例 7】证明：若 $f(x)$ 是可导的奇函数（偶函数），则 $f'(x)$ 一定是偶（奇）函数.

证　设 $f(x)$ 是可导的奇函数，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}$$
$$=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=-\left[-f'(x)\right]=f'(x)$$

故 $f'(x)$ 一定是偶函数，同理可证另一命题.

【例 8】证明：若 $f(x)$ 是可导的周期函数，则 $f'(x)$ 仍是周期函数.

证　已知 $f(x+T)=f(x)$，T 是非零常数，于是

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

【例 9】试确定常数 a、b 之值，使 $f(x)=\begin{cases}2e^x+a, & x<0\\ x^2+bx+1, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

解　（1）在 $x=0$ 处必须连续，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，即 $2+a=1$，则 $a=-1$.

（2）当 $x<0$ 时，$f'(x)=2e^x\to 2\ (x\to 0^-)$；

当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x+b\to b\ (x\to 0^+)$.

所以 b=2，即当 $a=-1$、$b=2$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【例 10】设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$．若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f(0)$.

解　$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin x}{x}\cdot f(x)\right]=f'(0)-f(0)$$

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}=f'(0)+f(0)$$

因为 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $F'_-(0)=F'_+(0)$，故 $f(0)=0$.

习　题　2.1

一、填空题

1．设函数 $f(x)$ 在 a 处可导，求下列极限.

（1）$\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(a)}{h-a}=$__________.

（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=$__________.

（3）$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+2t)-f(a)}{t}=$__________.

（4）$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+\alpha t)-f(a+\beta t)}{t}=$__________.

2．设 $f'(a)=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a-x)-f(a)}{x}=$_________，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=$_________.

3．设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$_________.

4．已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$__________.

二、单项选择题

1．如果 $f(x)$ 在点 a 处可导，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(a+\dfrac{1}{n}\right)-f(a)\right]=$（　　）.

A．$f'(a)$　　B．$nf'(a)$　　C．$\dfrac{f'(a)}{n}$　　D．$f(a)$

2．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（　　）.

A．左、右导数都存在　　B．左导数存在，右导数不存在

C．左导数不存在，右导数存在　　D．左、右导数都不存在

3．设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A．连续但不可导　　B．连续且可导

C．可导但不连续　　D．既不可导，也不连续

4．$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3x)}{x}=6$，则 $f'(0)=$（　　）.

A．6　　B．4　　C．3　　D．2

5．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）.

A．$\lim\limits_{h\to+\infty}\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　B．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在　　D．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

三、计算题

1．设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，求 $f'(0)$.

2．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

3．问 a、b 取何值时，才能使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 2\\ ax+b, & x>2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续且可导？

2.2　求导法则与基本公式

2.2.1　基本公式

用导数的定义不难求出基本初等函数的导数，将它们写在下面，称为基本公式，请同学们熟记于心.

1．$(C)'=0$（C 为常数）

2．$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$（μ 为任意实数）

3．$(a^{x})'=a^{x}\ln a$（$a>0$，$a\neq 0$）

4．$(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$

5．$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$（$a>0$，$a\neq 0$）

6．$(\ln x)'=\frac{1}{x}$

7．$(\sin x)'=\cos x$

8．$(\cos x)'=-\sin x$

9．$(\tan x)'=\sec^2 x$

10．$(\cot x)'=-\csc^2 x$

11．$(\sec x)'=\sec x\tan x$

12．$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

13．$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14．$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15．$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

16．$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2.2.2　导数的四则运算法则

定理 2.2　设 $u(x)$、$v(x)$ 在点 x 处有导数，c 为常数，则：

（1）$[cu(x)]'=cu'(x)$.

（2）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$.

（3）$\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

（4）$v(x)\neq 0$，$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

这里只给出（3）的证明，其余的可以自己推出.

$$\begin{aligned}\left[u(x)v(x)\right]'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\\&=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\end{aligned}$$

类似可推出：$(u_1u_2\cdots u_n)'=u_1'u_2\cdots u_n+u_1u_2'\cdots u_n+\cdots+u_1u_2\cdots u_n'$

【例 1】设 $y=2x^3-5x^2+3x-7$，求 y'.

解 $$\begin{aligned}y'&=(2x^3-5x^2+3x-7)'\\&=(2x^3)'-(5x^2)'+(3x)'-(7)'\\&=2\times 3x^2-5\times 2x+3-0\\&=6x^2-10x+3\end{aligned}$$

【例 2】设 $y=x^4-2x^3+5\sin x+\ln 3$，求 y'.

解 $y'=(x^4)'-2(x^3)'+5(\sin x)'+(\ln 3)'=4x^3-6x^2+5\cos x$

注 这里不能将 $(\ln 3)'$ 写成 $\dfrac{1}{3}$，一定要区别 $f'(x_0)$ 与 $\left[f(x_0)\right]'$. $f'(x_0)$ 是先求导，后将导函数里的 x 换成 x_0；而 $\left[f(x_0)\right]'$ 是先代值后求导，所以 $\left[f(x_0)\right]'=0$.

例如，$f(x)=\ln x$，$f'(3)$ 与 $\left[f(3)\right]'$ 是这样计算的：$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，所以 $f'(3)=\dfrac{1}{3}$，$\left[f(3)\right]'=\left[\ln 3\right]'=0$.

【例 3】设 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 $f'(x)=3x^2-4\sin x$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\pi^2-4$

【例 4】设 $y=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$，求 y'.

解 $y'=(\mathrm{e}^x)'(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)'=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=2\mathrm{e}^x\cos x$

【例 5】设 $y=x^3\cos x\sin x$，求 y'.

解 $$\begin{aligned}y'&=(x^3\cos x\sin x)'\\&=(x^3)'\cos x\sin x+x^3(\cos x)'\sin x+x^3\cos x(\sin x)'\\&=3x^2\cos x\sin x-x^3\sin^2 x+x^3\cos^2 x\end{aligned}$$

【例 6】求函数 $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$ 的导数.

解　$y'=\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)'=\dfrac{(\ln x)'x^3-\ln x(x^3)'}{(x^3)^2}=\dfrac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$

加 油 站

【例 7】设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$，且在点 $(-1,0)$ 处有公共切线，求 a、b 的值.

解　由于曲线 $f(x)$和$g(x)$ 都通过点$(-1,0)$，则 $-1-a=0$， $b+c=0$.

曲线 $f(x)$和$g(x)$ 在点 $(-1,0)$ 处有公共切线，而

$$f'(-1)=(3x^2+a)\big|_{x=-1}=3+a，\quad g'(-1)=2bx\big|_{x=-1}=-2b$$

于是有 $3+a=-2b$，联立解得 $a=-1$、$b=-1$、$c=1$.

【例 8】求曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程.

解　由 $y'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}=1$ 得切点为 $(1,0)$，于是所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$.

【例 9】已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$_______.

解　$y'=3x^2-3a^2$．令 $y'=0$，则有 $x=a$ 或 $x=-a$.

由已知得 $a^3-3a^3+b=0$ 或 $-a^3+3a^3+b=0$.

所以， $b=2a^3$ 或 $b=-2a^3$，从而 $b^2=4a^6$.

【例 10】设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，求 $f'(t)$.

解　$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{2t}=t\mathrm{e}^{2t}$，故 $f'(t)=\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^{2t}=(1+2t)\mathrm{e}^{2t}$.

【例 11】在曲线 $y=x^4$ 上求一点，使该点处曲线的切线与直线 $y=-32x+5$ 平行.

解　在 $y=x^4$ 上的任一点 $M(x,y)$ 处切线的斜率 k 为 $k=y'=(x^4)'=4x^3$，而已知直线 $y=-32x+5$ 的斜率 $k_1=-32$.

令 $k=k_1$，即 $4x^3=-32$，解得 $x=-2$，代入曲线方程得 $y=(-2)^4=16$.

故所求点为 $(-2,16)$.

习　题　2.2

一、填空题

1．$f(x)=5x^3-2^x+3\mathrm{e}^x$，则 $f'(0)=$________.

2．$f(x)=2\tan x+\sec x-1$，则 $f'(0)=$__________.

3．$f(x)=\sin x\cdot\cos x$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$__________.

4．$f(x)=x^2\ln x\cos x$，则 $f'(1)=$_________.

5．$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\ln 3$，则 $f'(1)=$_________.

6．$s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}$，则 $s'(t)=$____________.

二、单项选择题

1．曲线 $y=2\sin x+x^2$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）.

A．$2x-y=0$　　B．$2x+y=0$　　C．$2x-3y=0$　　D．$2x-5y=0$

2．设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则（　　）正确.

A．$a=1$、$b=0$　　B．$a=0$、$b=0$　　C．$a=1$、$b=1$　　D．$a=1$、$b=-1$

3．设 $f(x)=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$，则 $\left[f(1)\right]'=$（　　）.

A．7　　B．6　　C．3　　D．0

三、计算题

1．求曲线 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程和法线方程.

2．曲线 $y=x^3-x+2$ 上哪一点的切线与直线 $2x-y-1=0$ 平行？

3．已知 $y=\dfrac{\arctan x}{x}$，求 y'.

4．已知 $y=x^2\sin 2x$，求 y'.

5．已知 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求 y' 的定义域.

2.3　复合函数求导法则

到目前为止，对于复合函数 $y=\ln\sin x$、$y=\mathrm{e}^{\sqrt{x-1}}$ 等，还没讨论它们的可导性，这些问题借助下面的定理可以解决.

定理 2.3　如果 $u=g(x)$ 在点 x 处可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则复合函数 $y=f\left[g(x)\right]$ 在点 x 处可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)\text{或者}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

该定理也称链式法则，即 $y=y(u)$、$u=u(x)$、$x=x(t)$ 都可导，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y'_u\cdot u'_x\cdot x'_t$.

为了复合函数的求导顺利进行，形象地写出以下 16 个公式，这 16 个公式只需将导数基本公式中的 x 换成□，□代表含 x 的任意一个函数，而公式的右边再乘以一个 $(\square)'$ 即可.

1．$\left(\sqrt{\square}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{\square}}(\square)'$

2．$\left(\square^{\mu}\right)'=\mu\square^{\mu-1}(\square)'$

3．$\left(a^{\square}\right)'=a^{\square}\ln a(\square)'=a^{\square}\square'\ln a$

4．$\left(\mathrm{e}^{\square}\right)'=\mathrm{e}^{\square}(\square)'$

5. $(\log_a \square)' = \dfrac{1}{\square}(\log_a \mathrm{e})(\square)' = \dfrac{(\square)'}{\square \ln a}$

6. $(\ln \square)' = \dfrac{1}{\square}(\square)'$

7. $(\sin \square)' = \cos \square (\square)'$

8. $(\cos \square)' = -\sin \square (\square)'$

9. $(\tan \square)' = \sec^2 \square (\square)'$

10. $(\cot \square)' = -\csc^2 \square (\square)'$

11. $(\sec \square)' = \sec \square \tan \square (\square)'$

12. $(\csc \square)' = -\csc \square \cot \square (\square)'$

13. $(\arcsin \square)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\square^2}}(\square)'$

14. $(\arccos \square)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\square^2}}(\square)'$

15. $(\arctan \square)' = \dfrac{1}{1+\square^2}(\square)'$

16. $(\operatorname{arccot} \square)' = -\dfrac{1}{1+\square^2}(\square)'$

说明一下，为什么将公式 2 的 $\mu = \dfrac{1}{2}$ 单独列为公式 1，这是因为 $\sqrt{\square}$ 的导数出现的频率高.

【例 1】设 $y = (2x+5)^3$，求 y'.

解　由公式 2 知，$\square = (2x+5)^3$，所以

$$y' = 3(2x+5)^2 \cdot (2x+5)' = 6(2x+5)^2$$

【例 2】设 $y = \sin 5x$，求 y'.

解　由公式 7 知，$\square = 5x$，所以

$$y' = \cos 5x (5x)' = 5\cos 5x$$

【例 3】设 $y = \ln(-x)$，求 y'.

解　由公式 6 知，$\square = -x$，所以

$$y' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$$

【例 4】设 $y = \ln(\sin x)$，求 y'.

解　由公式 6 知，$\square = \sin x$，所以

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \cot x$$

【例 5】设 $y = \tan x^4$，求 y'.

解　由公式 9 知，$\square = x^4$，所以

$$y' = (\sec x^4)^2 (x^4)' = 4x^3 \cdot (\sec x^4)^2$$

【例 6】设 $y=\sqrt{1-x^2}$，求 y'.

解　由公式 1 知，$\square=1-x^2$，所以

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

【例 7】设 $y=\mathrm{e}^{x^2}$，求 y'.

解　由公式 4 知，$\square=x^2$，所以

$$y'=\mathrm{e}^{x^2}\left(x^2\right)'=2x\mathrm{e}^{x^2}$$

【例 8】设 $y=\ln\cos\mathrm{e}^x$，求 y'.

解　由公式 6 知，$\square=\cos\mathrm{e}^x$，所以

$$y'=\frac{1}{\cos\mathrm{e}^x}\cdot\left[\cos\mathrm{e}^x\right]'=\frac{1}{\cos\mathrm{e}^x}\cdot\left[-\sin\mathrm{e}^x\cdot\left(\mathrm{e}^x\right)'\right]=\frac{-\mathrm{e}^x\cdot\sin\mathrm{e}^x}{\cos\mathrm{e}^x}$$

【例 9】设 $y=\sin\dfrac{1}{1+x}$，求 y'.

解　由公式 7 知，$\square=\dfrac{1}{1+x}$，所以

$$y'=\cos\frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2}\cos\frac{1}{1+x}$$

【例 10】设 $y=\sqrt[4]{1-3x^2}$，求 y'.

解　由公式 2 知，$\square=1-3x^2$，$\mu=\dfrac{1}{4}$，所以

$$y'=\frac{1}{4}\left(1-3x^2\right)^{-\frac{3}{4}}\left(1-3x^2\right)'=-\frac{3}{2}x\left(1-3x^2\right)^{-\frac{3}{4}}$$

【例 11】设 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$，求 y'.

解　由公式 6 知，$\square=x+\sqrt{x^2+a}$，所以

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a}}\left(x^2+a\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

【例 12】设 $y=\arcsin\sqrt{x-1}$，求 y.

解　由公式 13 知，$\square=\sqrt{x-1}$，所以

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)}}\left(\sqrt{x-1}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2\sqrt{(2-x)(x-1)}}$$

【例 13】设 $y=\sqrt{\sin\mathrm{e}^{x^2}}$，求 y'.

解　由公式 1 知，$\square=\sin\mathrm{e}^{x^2}$，所以

$$y'=(\sqrt{\sin\mathrm{e}^{x^2}})'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\mathrm{e}^{x^2}}}(\sin\mathrm{e}^{x^2})'=\frac{1}{2\sqrt{\sin\mathrm{e}^{x^2}}}\cdot\cos\mathrm{e}^{x^2}\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}\cdot \cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot (x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{\sin e^{x^2}}}\cdot \cos e^{x^2}\cdot e^{x^2}\cdot 2x=\frac{e^{x^2}x\cos e^{x^2}}{\sqrt{\sin e^{x^2}}}$$

加 油 站

【例 14】设 $y=x^x$，求 y'.

解　令 $y=e^{x\ln x}$，再由公式 4 知，$\square=x\ln x$， $y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=x^x(1+\ln x)$.

【例 15】设 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$，求 y'.

解　$y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}$

【例 16】设 $y=\cos x^2\cdot\sin^2\frac{1}{x}$，求 y'.

解　$y'=-\sin x^2\cdot 2x\cdot\sin^2\frac{1}{x}+\cos x^2\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

【例 17】设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$，求 $y'|_{x=0}$.

解　$y'=\frac{2}{3}(x+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)$，　$y'|_{x=0}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$

【例 18】设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$，求 y'.

解　因为 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$，所以

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x}-\frac{2x}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2(x-1)}-\frac{x}{1+x^2}$$

【例 19】设 $y=\ln\ln\ln x$，求 y'.

解　$y'=\frac{1}{\ln\ln x}(\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}(\ln x)'=\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)}$

【例 20】设 $y=\sin^3(6^x)$，求 y'.

解　$y'=3(\sin 6^x)^2(\sin 6^x)'=3(\sin 6^x)^2\cdot\cos 6^x\cdot(6^x)'=3\ln 6(\sin 6^x)^2\cdot\cos 6^x\cdot 6^x$

【例 21】设 $y=\frac{\sin 2x}{x}$，求 y'.

解　$y'=\frac{2x\cos 2x-\sin 2x}{x^2}$

习　题　2.3

一、填空题

1．$y=\ln(2x+3)$，则 $y'=$____________.

2．$y=(6x+2)^2$，则 $y'=$ __________.

3．$y=\mathrm{e}^{3x-1}$，则 $y'=$__________.

4．$y=\sin(1-x)$，则 $y'=$____________.

5．$y=\arctan(2x+1)$，则 $y'=$____________.

6．$y=\dfrac{1}{x}\sin x$，则 $y'=$________________.

7．$y=3^{x^2}$，则 $y'=$________________.

8．$y=\ln^2(x-1)$，　则 $y'=$________________.

9．$y=\arctan x^2$，则 $y'=$____________________.

10．$y=x\mathrm{e}^{2x+3}$，　则 $y'=$____________________.

二、单项选择题

1．过曲线 $y=x+\sin^2 x$ 上一点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的切线斜率是（　　）.

A．2　　B．1　　C．5　　D．-2

2．若 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right]=\dfrac{1}{x}$，则 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=$（　　）.

A．-1　　B．$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．2

3．若 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x\leqslant 0\\ b(1-x^2), & x>0\end{cases}$ 处处有导数，则（　　）.

A．$a=0$、$b=1$　　B．$a=2$、$b=1$　　C．$a=b=-2$　　D．$a=-2$、$b=2$

4．若 $f(x)=\ln 3x$，则 $f'(x)=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{x}$　　B．$\dfrac{1}{3x}$　　C．$-\dfrac{1}{x}$　　D．$-\dfrac{1}{3x}$

5．若 $y=f(x^2)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$（　　）.

A．$2x\cdot f'(x^2)$　　B．$f'(x^2)$　　C．$x\cdot f'(x)$　　D．$2x\cdot f'(x)$

三、计算题

1．求下列函数的导数.

（1）$y=(2x+5)^4$；　（2）$y=\cos(4-3x)$；　（3）$y=\sin^2 x$；

（4）$y=\sqrt{a^2-x^2}$；　（5）$y=\arctan(\mathrm{e}^x)$；　（6）$y=(\arcsin x)^2$；

（7）$y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos 3x$；　（8）$y=\arcsin\sqrt{x}$；　（9）$y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；

（10）$y = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x + 3)$；　（11）$y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$．

2．求曲线 $y = 2x + \mathrm{e}^{3x}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程与法线方程．

3．设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，讨论 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 上是否连续．

2.4　隐函数求导及其他

2.4.1　隐函数的导数

如果变量 x 和 y 满足方程 $F(x,y) = 0$，在一定的条件下，当 x 取某区间内的任意一个值时，相应地总有满足这个方程的唯一的 y 值存在，那么则说方程 $F(x,y) = 0$ 在该区间内确定了一个隐函数，把一个隐函数化成显函数，称为隐函数的显化．例如，对于方程 $x^3 + y^3 - 1 = 0$，解出 $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$，就是把隐函数化成了显函数，有时隐函数显化是很困难的，甚至是不可能的，但又需要计算隐函数的导数，因此，希望有一种方法能直接求出隐函数的导数．

方法如下：

两边对 x 求导．对于 y 把它看作是□，□是 x 的一个函数．

【例 1】设由方程 $\mathrm{e}^y + xy - \mathrm{e} = 0$ 确定的函数为 $y = f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $y'(0)$．

解　两边对 x 求导，把 y 看成□，则

$$\mathrm{e}^y y' + y + xy' = 0$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\dfrac{y}{\mathrm{e}^y + x}$，把 $x = 0$ 代入原方程，得 $y = 1$，$y'(0) = -\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

千万不能直接将 $x = 0$ 代入 $y' = -\dfrac{y}{\mathrm{e}^y + x}$ 中，而得到 $y'(0) = -\dfrac{y}{\mathrm{e}^y}$．

【例 2】由方程 $y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$ 确定的函数为 $y = f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $y'(0)$．

解　两边对 x 求导，把 y 看成□，则

$$5y^4 y' + 2y' - 1 - 21x^6 = 0$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = \dfrac{1 + 21x^6}{5y^4 + 2}$，把 $x = 0$ 代入原方程，得 $y = 0$，所以 $y'(0) = \dfrac{1}{2}$．

【例 3】求由方程 $x^3 - 3xy + y^3 = 3$ 所确定的曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(1,2)$ 处的切线方程．

解　两边对 x 求导，把 y 看成□，则

$$3x^2 - 3y - 3xy' + 3y^2 y' = 0$$

解得 $y' = \dfrac{y - x^2}{y^2 - x}$，在点 $M(1,2)$ 处 $y'\big|_{(1,2)} = \dfrac{1}{3}$，于是，在点 $M(1,2)$ 处的切线方程为

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1)\text{，即 } x - 3y + 5 = 0$$

【例 4】求由 $x^2 + y\sin x - \cos 2y = 0$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解　两边对 x 求导，把 y 看成□，则

$$2x+y\cos x+y'\sin x+2\sin 2y\cdot y'=0$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\dfrac{2x+y\cos x}{\sin x+2\sin 2y}$.

【例 5】求 $y=x^{\sin x}$（$x>0$）的导数.

解　$\ln y=\sin x\ln x$. 两边对 x 求导，把 y 看成□得

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

2.4.2　参数式函数求导

定理 2.4　如果 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 都是可导的，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$ 也可导，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

【例 6】设摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\cot\dfrac{t}{2}$

【例 7】求由方程 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\cot t$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(-\frac{b}{a}\cot t\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$$

2.4.3　反函数的求导法则

定理 2.5　如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x\,|\,x=f(y),y\in I_y\}$ 内也可导，且 $\left[f^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{f'(y)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

【例 8】求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　因为 $x=\sin y$ 在 $I_y=\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $(\sin y)'=\cos y>0$，所以在对应区间

$I_x=(-1,1)$ 内有 $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{(\sin y)'}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

类似地，可得:

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.4.4　相关变化率

设 $x=x(t)$、$y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，从而使变化率 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 之间也存在一定的关系，这两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

【例 9】平静水面上落下一个石头，产生同心波纹，若最外一圈波的半径的增大速率总是 3m / s，问在 2s 末扰动水面面积增大的速率为多少？

解　设最外一圈波的半径为 $r=r(t)$，圆的面积 $S=\pi r^2$，两边对 t 求导，得 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=2\pi r\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

当 $t=2$ 时，$r=3\times 2=6$，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=3$，代入上式得

$\left.\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right|_{t=2}=2\pi\times 6\times 3=36\pi$（$\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$）.

【例 10】往水深 8m，上顶直径 8m 的正圆锥形容器中注水，其体积速率为 $4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$，当水深为 5m 时，其表面上升的速率是多少？

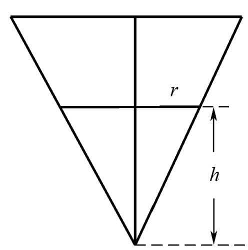


图 2.5

解　如图 2.5 所示，由 $2r=h$，得

$$v=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{12}h^3$$

两边对 t 求导得:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$，$h=5\mathrm{m}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\dfrac{16}{25\pi}$（m/ min）.

加 油 站

【例 11】由方程 $\sin(x^2+y^2)+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 确定的函数为 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　两边对 x 求导，得

$$\cos(x^2+y^2)(2x+2yy')+\mathrm{e}^x-y^2-2xyy'=0$$

$$y'=\frac{y^2-\mathrm{e}^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}$$

【例 12】由方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定的函数为 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x$$

$$y' = -\frac{ye^{xy} + \sin x}{xe^{xy} + 2y}$$

【例 13】由方程 $x = y^y$ 确定的函数为 $y = f(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　两边取对数得 $\ln x = y\ln y$.

两边对 x 求导，$\frac{1}{x} = y'\ln y + y\cdot\frac{y'}{y}$，$y' = \frac{1}{x(1+\ln y)}$.

【例 14】参数方程 $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$，$t \in (-\infty, +\infty)$，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dx}{dy}$.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^t \sin t + e^t \cos t}{e^t \cos t - e^t \sin t} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x_t'}{y_t'} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}$

【例 15】求曲线 $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$，$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，在点 $(x(t), y(t))$ 处的切线方程，并证明切线在坐标轴上的截距的平方和等于 2^2.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{3\times 2\sin^2 t\cos t}{-3\times 2\cos^2 t\sin t} = -\tan t$

所以过点 $(x(t), y(t))$ 处的切线方程为 $y - 2\sin^3 t = -\tan t\left(x - 2\cos^3 t\right)$，即 $\frac{y}{2\sin t} + \frac{x}{2\cos t} = 1$，显然在 x 轴上的截距为 $2\cos t$，在 y 轴上的截距为 $2\sin t$，所以 $(2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 = 2^2$.

【例 16】求下列函数的导数.

（1）$y = \ln x$；

（2）$y = \arctan x$.

解　（1）由于 $y = \ln x$ 是 $x = e^y$ 的反函数，因此

$$(\ln x)_x' = \frac{1}{(e^y)_y'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

（2）由于 $y = \arctan x$ 是 $x = \tan y$ 的反函数，$x \in \mathbf{R}$，$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，因此

$$(\arctan x)_x' = \frac{1}{(\tan y)_y'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

【例 17】设 $x = e^{\arcsin y}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解　$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^{\arcsin y}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{e^{\arcsin y}} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 \ln x}}{x} = \frac{\cos\ln x}{x}$

因为 $y \in [-1, 1]$，所以 $x \in \left[e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}\right]$.

【例 18】一气球从距离观察员 500m 处的地面垂直上升，当气球上升高度为 500m 时，其速率为$140\text{m}/\min$，求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少？

解　设气球上升 t 秒后，其高度为 h，观察员视线的仰角为 α，则 $\tan\alpha=\dfrac{h}{500}$.

上式两边对 t 求导，得

$$\sec^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

由已知条件，存在 t_0，使 $h\big|_{t=t_0}=500\text{m}$，$\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}=140\text{m}/\min$，又因为 $\tan\alpha\big|_{t=t_0}=1$，$\sec^2\alpha\big|_{t=t_0}=2$，代入上式得

$$2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{500}\times140$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\dfrac{70}{500}=0.14$（$\text{rad}/\min$）.

习　题　2.4

一、填空题

1．设 $y^2-2xy+9=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

2．设 $x^3+y^3-3axy=0$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

3．设 $y=1-xe^y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

4．设 $x^2-y^2=1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

5．设 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

6．设 $\tan y=x+y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

7．设 $y=\cos(x+y)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

8．设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

9．设 $\begin{cases}x=\dfrac{t^2}{2}\\ y=1-t\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

10．设 $\begin{cases}x=t(1-\sin t)\\ y=\cos t\end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________________.

二、单项选择题

1．由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的曲线 $y=y(x)$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线斜率为（　　）.

A．-1　　B．1　　C．$\dfrac{1}{3}$　　D．$-\dfrac{1}{2}$

2．设由方程 $xy^3=1$ 确定的函数为 $y=y(x)$（$y>0$），则 $y'(1)=$（　　）.

A．2　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．-2　　D．$-\dfrac{1}{3}$

3．设由方程 $y^2-x-3x^2=0$ 确定的函数为 $y=y(x)$，则 $y'(1,2)=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{2}$　　B．2　　C．$\dfrac{7}{4}$　　D．-2

4．设由方程 $x-y+\dfrac{1}{2}\sin y=0$ 确定的函数为 $y=y(x)$，则 $y'=$（　　）.

A．$\dfrac{2}{2+\cos y}$　　B．$\dfrac{2}{2-\cos y}$　　C．$\dfrac{2}{\cos y}$　　D．$\dfrac{2}{1-\cos y}$

5．设参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\pi}{4}}$ 为（　　）.

A．3　　B．2　　C．$-\dfrac{b}{a}$　　D．$-\dfrac{a}{b}$

三、计算题

1．设由方程 $2^y=x+y$ 确定的函数为 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1)}$.

2．设由方程 $xy+\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^y=0$ 确定的函数为 $y=y(x)$，求 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(0,0)}$ 及切线方程.

3．设由方程 $\left(x^2\right)^{\frac{1}{y}}=y^{\frac{1}{x^2}}$ 确定的函数为 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4．设 $\begin{cases} x=2t^2 \\ y=3t^3 \end{cases}$，求该曲线在 $t=1$ 处的切线方程和法线方程.

5．求曲线 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

6．两船同时从一码头出发，甲船以 60km/h 的速度向北行驶，乙船以 80km/h 的速度向东行驶，求两船间的距离增加的速度.

2.5 高 阶 导 数

我们知道，$y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，把 $y'=f'(x)$ 的导数称为函数

$y=f(x)$的二阶导数，记作y''或$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$，即$y''=(y')'$或$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

相应地，把$y=f(x)$的导函数$f'(x)$称为函数$y=f(x)$的一阶导数．类似地，把二阶导函数的导数，称为三阶导数，…，一般把$f(x)$的$(n-1)$阶导函数的导数，叫作$f(x)$的n阶导数，分别记作

$$y''', y^{(4)}, \cdots, y^{(n)} \text{或} \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}, \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$$

函数$f(x)$具有n阶导数，通常说成$f(x)$ n阶可导，二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数.

【例 1】设$y=x^4$，求y''及$y^{(5)}$.

解　$y'=4x^3$，$y''=4\times 3x^2$，$y'''=4\times 3\times 2x$，$y^{(4)}=4\times 3\times 2\times 1=4!$，$y^{(5)}=0$

一般$y=x^n$，$n\in\mathbf{N}$，则$y^{(n)}=n!$.

【例 2】$y=\mathrm{e}^{ax}$，求$y^{(n)}$.

解　$y'=a\mathrm{e}^{ax}$，$y''=a^2\mathrm{e}^{ax}$，…，$y^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$

【例 3】$y=\sin x$，求$y^{(n)}$.

解　$y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

用类似的方法，可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

【例 4】设$y=\ln(1+x)$，求$y^{(n)}$.

解　$y'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$

$$y''=-1(1+x)^{-2}$$

$$y'''=(-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=(-1)(-2)\cdots[-(n-1)](1+x)^{-n}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

几个常用的基本初等函数的n阶导数公式如下：

（1）$\left(\mathrm{e}^x\right)^{(n)}=\mathrm{e}^x$；

（2）$\left(\mathrm{e}^{ax}\right)^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax}$；

（3）$\left(a^{x}\right)^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n}$；

（4）$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$；

（5）$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$；

（6）$\left(x^{\alpha}\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$；

（7）$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^{n}}$.

【例 5】设参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left[\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^2}\right]\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^2}\frac{1}{\varphi'}=\frac{\psi''\varphi'-\psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$$

【例 6】计算由$\begin{cases}x=t^2\\ y=t^4\end{cases}$确定的函数$y=y(x)$的二阶导数.

解　$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{4t^3}{2t}=2t^2$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2t^2\right)\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=4t\cdot\frac{1}{2t}=2$

如果$u=u(x)$、$v=v(x)$在点x处都具有n阶导数，则

（1）$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$；

（2）$(cu)^{(n)}=cu^{(n)}$，c为常数；

（3）$(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$.

【例 7】设$y=x^2\mathrm{e}^x$，求$y^{(20)}$.

解　设$u=\mathrm{e}^x$，则$u^{(k)}=\mathrm{e}^x$；设$v=x^2$，则$v'=2x$，$v''=2$，$v^{(3)}=0$．因此

$$y^{(20)}=(uv)^{(20)}=\mathrm{e}^x x^2+\mathrm{C}_{20}^1\mathrm{e}^x\cdot 2x+\mathrm{C}_{20}^2\mathrm{e}^x\cdot 2=\mathrm{e}^x\left(x^2+40x+380\right)$$

【例 8】设由方程$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$确定的函数为$y=y(x)$，求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$，两边对x求导得$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$，$y'=\frac{2}{2-\cos y}$.

两边再对x求导，$y''=-\frac{-2\sin y\cdot y'}{(2-\cos y)^2}=-\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}$.

【例 9】设$y=x^2\cos x$，求$y''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

解　因为$y'=2x\cos x-x^2\sin x$，$y''=2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x$，所以

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi$$

【例 10】已知 $f(x)$ 二阶可导，求 $y=\ln[f(x)]$ 的二阶导数.

解　因为 $y=\ln[f(x)]$，所以

$$y'=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad y''(x)=\frac{f''(x)f(x)-f'^{2}(x)}{f^{2}(x)}$$

【例 11】 $f(x)$ 具有二阶导数，设 $y=f\left(x^2\right)$，求 y'' .

解　$y'=f'\left(x^2\right)\left(x^2\right)'=2xf'\left(x^2\right)$， $y''=f''\left(x^2\right)4x^2+2f'\left(x^2\right)$

【例 12】已知参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+t^2\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3t^2+2t}{1-\dfrac{1}{1+t}}=3t^2+5t+2$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(3t^2+5t+2\right)\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{6t+5}{1-\dfrac{1}{1+t}}=\frac{(6t+5)(t+1)}{t}$$

【例 13】验证函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ 满足方程 $xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0$.

解　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)$， $y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)+\dfrac{1}{4x}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)$

代入方程得

$$x\cdot\left[-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{4x}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)\right]+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{4}y$$
$$=-\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{4\sqrt{x}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)-\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\right)=0$$

故函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ 满足方程 $xy''+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{1}{4}y=0$.

加 油 站

【例 14】求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程与法线方程.

解　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$，两边对 x 求导得 $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\cdot y'=0$，推导得出 $y'=-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$，由此可得点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 的导数为 $y'=-1$.

所以切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=-\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$，即 $y+x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=0$.

法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$，即 $y=x$.

【例 15】 设由方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 确定的函数为 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 两边对 x 求导，得

$$y'\cos y+\mathrm{e}^x-2xyy'-y^2=0$$

$$y'=\frac{\mathrm{e}^x-y^2}{2xy-\cos y}$$

【例 16】 设 $\tan y=x+y$，求 y'.

解 两边对 x 求导，得

$$y'\sec^2 y=1+y'$$

$$y'=\frac{1}{\sec^2 y-1}=\cot^2 y$$

【例 17】 $\begin{cases}x=\ln\left(1+t^2\right)\\ y=\arctan t\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2t}\right)\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{1}{2t^2}\frac{1+t^2}{2t}=-\frac{1+t^2}{4t^3}$$

【例 18】 设 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $y^{(n)}$.

解 $$y'=\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1+x)^2}=-2(1+x)^{-2}$$

$$y''=2(-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$y'''=2(-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=2(-1)(-2)(-3)\cdots(-n)(1+x)^{-(n+1)}$$

$$=(-1)^n\frac{2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$$

【例 19】 设 $y=x^2\mathrm{e}^x$，求 $y^{(100)}$.

解 $u=\mathrm{e}^x$，$u^{(k)}=\mathrm{e}^x$，$v=x^2$，$v'=2x$，$v''=2$，$v'''=0$，由公式有

$$(uv)^{(100)}=\mathrm{e}^x\cdot x^2+\mathrm{C}_{100}^1\mathrm{e}^x\cdot 2x+\mathrm{C}_{100}^2\mathrm{e}^x\cdot 2=(9900+200x+x^2)\mathrm{e}^x$$

习　题　2.5

一、填空题

1．$y=3^x$，则 $y^{(n)}=$__________.

2．$y=x^9+2x^8+x+1$，则 $y^{(9)}(0)=$__________.

3．$y=\ln(1+x)$，则 $y''(1)=$__________.

4．$y=\sin^2 x$，则 $y''=$__________.

5．$y=x\ln x$，则 $y^{(n)}=$__________.

6．$x^2+y^2=1$，则 $y''=$__________.

7．$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t^2 \\ y=2t^3 \end{cases}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=$__________.

8．$y=\arctan x$，则 $y''(1)=$__________.

9．$y=2x^2+\ln x$，则 $y''=$__________.

10．$x^2-y^2=1$，则 $y''=$__________.

二、单项选择题

1．设 $y=\mathrm{e}^{2x}$，则 $y^{(67)}=$（　　）.

A．$2^{67}\mathrm{e}^{2x}$　　B．e^{2x}　　C．$-\mathrm{e}^{2x}$　　D．$67\mathrm{e}^{2x}$

2．设 $y=4x^3$，则 $y^{(4)}_{(0)}=$（　　）.

A．5!　　B．4!　　C．3!　　D．0

3．设 $y^{(n-2)}=\sin x$，则 $y^{(n)}=$（　　）.

A．$-\cos x$　　B．$\sin x$　　C．$\cos x$　　D．$-\sin x$

4．已知 $f'''(x)$ 存在，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则 $f'''(x)=$（　　）.

A．$2f(x)f'(x)$　　B．$2[f(x)]^3$　　C．$6[f(x)]^4$　　D．$4[f(x)]^4$

5．已知 $f(x)=x^2$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

6．$y=\ln x^2$，则 $y''(1)=$（　　）.

A．0　　B．-2　　C．1　　D．$\dfrac{1}{2}$

7．$y=\sin 3x$，则 $y^{(n)}=$（　　）.

A．$3^n\sin\left(3x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$　　B．$3^n\sin\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$

C．$3^n\sin(3x+2n\pi)$　　D．$3^n\cos\left(x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$

8．设 $y=\arctan x$，则 $y''(0)=$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．-1

9．直线运动的路程函数为 $s(t)=10+t+\frac{5}{2}t^2$，则 $t=2$ 时的加速度为（　　）.

A．1　　B．2　　C．5　　D．10

10．$y=\ln\frac{x^2}{x+1}$，则 $y''(1)=$（　　）.

A．$\frac{5}{9}$　　B．$\frac{4}{9}$　　C．$-\frac{7}{4}$　　D．0

三、计算题

1．设由方程 $y=1+xe^y$ 确定的函数为 $y=y(x)$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2．设 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin^2 t \end{cases}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3．设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4．设 $y=\frac{e^x}{x}$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

5．验证函数 $y=e^x\sin x$ 满足方程 $y''-2y'+2y=0$.

6．假设质点沿 x 轴运动的速度为 $\frac{dx}{dt}=f(x)$，求质点的加速度.

7．设 $f'(x)=[f(x)]^2$，求 $f^{(n)}(x)$.

8．设 $y=\sin^2 x$，求 $y^{(n)}$.

9．设 $y=xe^x$，求 $y^{(n)}$.

10．设 $\begin{cases} x=t^3 \\ y=t^2 \end{cases}$，求 $\frac{d^2x}{dy^2}$.

2.6 微　　分

2.6.1 微分的概念

函数的导数表示函数在点 x 处的变化率，它描述了函数在点 x 处变化的快慢程度．有时还要了解函数在某一点，当自变量取得一个很小的改变量时，函数值改变量的大小，这就是微分的背景.

下面先看一个简单的例子.

设有边长为 x 的正方形，其面积为 $S=x^2$，当边长 x 取一个很小的改变量 Δx 时，其面积 S 的相应改变量为

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

从上式可以看出，ΔS 分成两部分，第一部分为 $2x\Delta x$，如图 2.6 中的阴影部分；第二部分为 $(\Delta x)^2$，如图 2.6 中右上角小正方形，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小．由此可见，当 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 ΔS 可以用第一部分 $2x\Delta x$ 来近似代替．

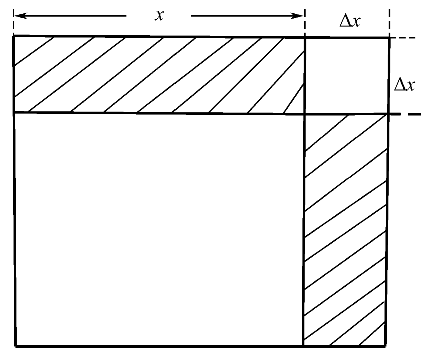


图 2.6

定义 2.4　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，且 $x_0+\Delta x\in U(x_0\delta)$．如果函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x$$

现在自然而然地出现一个问题：

一个函数满足什么条件时是可微的？退一步，如果函数可微，则常数 A 怎样计算？

下面的定理可以解决人们心中的疑惑.

定理 2.6　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且

$$f'(x_0)=A$$

证　$\xRightarrow{\text{必要性}}$　已知 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，即 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，两边除以 Δx，得 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}$，于是令 $\Delta x\to 0$，得到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)=A$.

$\xLeftarrow{\text{充分性}}$　$y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处也一定可微，且 $A=f'(x_0)$，因为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，因此有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha\text{，}\quad \alpha\to 0\ (\ \Delta x\to 0\ )$$

由此得 $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x$.

因 $\alpha\cdot\Delta x=o(\Delta x)$，且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx，所以 $f(x)$ 在 x_0 处也是可微的.

以后记 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$，从而有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$.

这就是说，函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 之商，等于该函数的导数，因此导数也叫“微商”.

$$\begin{aligned}\Delta y&=f'(x_0)\mathrm{d}x+o(\Delta x)\\&=\mathrm{d}y+o(\Delta x)\end{aligned}$$

（1）$\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$.

（2）当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}f'(x_0)=1$$

（3）当$|\Delta x|$很小时，有

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$$

【例 1】求函数 $y = x^4$ 在 $x = 1$ 处的微分及 $\Delta x = 0.01$ 时的微分.

解　因为 $y' = 4x^3$， $y'|_{x=1} = 4$， 所以 $\mathrm{d}y = 4\mathrm{d}x = 4\Delta x$.

当 $\Delta x = 0.01$ 时， $\mathrm{d}y = 4 \times 0.01 = 0.04$.

【例 2】设 $y = \dfrac{1}{1+x^2}$，求 $\mathrm{d}y$.

解　因为 $y' = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，所以 $\mathrm{d}y = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

2.6.2　微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，需要说明微分的几何意义.

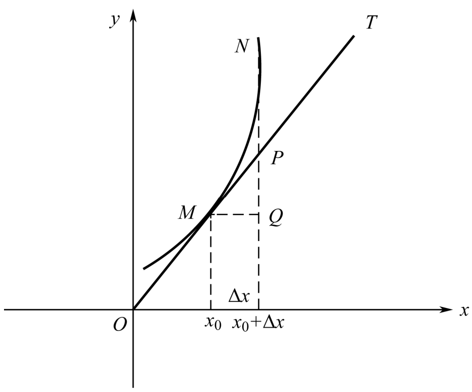


图 2.7

在直角坐标系中作函数 $y = f(x)$ 的图形，如图 2.7 所示.

对于固定点 x_0，曲线上有一个点 $M(x_0, y_0)$，当自变量 x_0 有微小增量 Δx 时，得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，由图 2.7 可知： $MQ = \Delta x$， $QN = \Delta y$，过点 M 作曲线 $y = f(x)$ 的切线 MT 交 NQ 于 P.

$$QP = f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y$$

所以用 $\mathrm{d}y$ 代替 Δy，即用 QP 代替 QN，这就是微分的几何意义.

2.6.3　微分法则与基本初等函数的微分公式

1. 微分法则

（1） $\mathrm{d}[cu(x)] = c\mathrm{d}u(x)$；

（2） $\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$；

（3） $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$；

（4） $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$.

现在以（4）为例加以证明.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

即 $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}\mathrm{d}x = \dfrac{vu'\mathrm{d}x - uv'\mathrm{d}x}{v^2} = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$，因此 $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$， $\mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x$.

2. 基本初等函数的微分公式

（1） $\mathrm{d}(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$；

（2）$\mathrm{d}a^x = a^x \ln a\mathrm{d}x$；

（3）$\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（4）$\mathrm{d}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}\mathrm{d}x = \frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$；

（5）$\mathrm{d}\ln x = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（6）$\mathrm{d}\sin x = \cos x\mathrm{d}x$；

（7）$\mathrm{d}\cos x = -\sin x\mathrm{d}x$；

（8）$\mathrm{d}\tan x = \sec^2 x\mathrm{d}x$；

（9）$\mathrm{d}\cot x = -\csc^2 x\mathrm{d}x$；

（10）$\mathrm{d}\sec x = \sec x\tan x\mathrm{d}x$；

（11）$\mathrm{d}\csc x = -\csc x\cot x\mathrm{d}x$；

（12）$\mathrm{d}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（13）$\mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

（14）$\mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（15）$\mathrm{d}\mathrm{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

【例 3】设 $y = \ln\sin x$，求 $\mathrm{d}y$．

解　因为 $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$，所以 $\mathrm{d}y = \cot x\mathrm{d}x$．

【例 4】设 $y = \sin(2x+1)$，求 $\mathrm{d}y$．

解　因为 $y' = 2\cos(2x+1)$，所以 $\mathrm{d}y = 2\cos(2x+1)\mathrm{d}x$．

【例 5】填空.

（1）$\mathrm{d}(\quad) = 2x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\mathrm{d}(\quad) = \cos x\mathrm{d}x$．

解　（1）因为 $\left(x^2\right)' = 2x$，所以 $\mathrm{d}\left(x^2+C\right) = 2x\mathrm{d}x$．

（2）因为 $(\sin x)' = \cos x$，所以 $\mathrm{d}(\sin x + C) = \cos x\mathrm{d}x$．

3．需要掌握的一些常见公式

（1）$k\mathrm{d}x = \mathrm{d}(kx+C)$（以下公式右边都不加常数 C）；

（2）$x^\mu\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)$（$\mu \neq -1$）；

（3）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\ln|x|)$；

（4）$a^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)$；

（5）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{d}\mathrm{e}^x$；

（6）$e^{ax}dx = d\left(\dfrac{e^{ax}}{a}\right)$；

（7）$\sin x dx = d\left(-\cos x\right)$；

（8）$\cos x dx = d\sin x$；

（9）$\sin\left(ax+b\right)dx = \dfrac{1}{a}d\left[-\cos\left(ax+b\right)\right]$；

（10）$\cos\left(ax+b\right)dx = \dfrac{1}{a}d\sin\left(ax+b\right)$；

（11）$\sec^2 x dx = d\tan x$；

（12）$\csc^2 x dx = d\left(-\cot x\right)$；

（13）$\dfrac{1}{1+x^2}dx = d(\arctan x)$；

（14）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$.

掌握并记住这 14 个公式，等之后学习第 4 章不定积分的时候就能轻松许多.

设 $y = f\left(u\right)$ 及 $u = g\left(x\right)$ 都可导，则复合函数 $y = f\left[g\left(x\right)\right]$ 的微分为 $dy = y'_x dx = f'\left(u\right)g'\left(x\right)dx$，$g'\left(x\right) = u'$，$g'\left(x\right)dx = du$，所以复合函数 $y = f\left[g\left(x\right)\right]$ 的微分公式也可以写成

$$dy = f'\left(u\right)du \text{ 或 } dy = y'_u du$$

由此可见，无论 u 是自变量，还是中间变量，微分形式 $dy = f'\left(u\right)du$ 都保持不变，微分的这一性质称为一阶微分形成的不变性.

如 $y = e^u$，$u = x^3$

$$dy = y'_u du = e^u du = e^{x^3}dx^3 = 3x^2e^{x^3}dx$$

2.6.4　微分在近似计算中的应用

1．函数增量的近似计算

在许多工程技术问题中，经常遇到一些复杂函数的增量计算，如果直接计算，是十分费力的，利用微分来代替复杂的增量计算，则简便可行.

$y = f\left(x\right)$，如果其增量为Δy，$\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\Delta x + o\left(\Delta x\right)$，当$|\Delta x|$很小时，有

$$\Delta y \approx f'\left(x_0\right)\Delta x = dy \tag{2.1}$$

【例 6】半径为 $R = 1\text{cm}$ 的金属圆盘，加热后金属圆盘的半径伸长了 $\Delta R = 0.01\text{cm}$，求金属圆盘的面积增加的近似值.

解　圆面积 $S = \pi R^2$.

$$\Delta S \approx dS = 2\pi R\Delta R = 2\pi \times 1 \times 0.01 = 0.02\pi \ (\text{cm}^2)$$

【例 7】半径为 $R = 10\text{cm}$ 的金属球，加热后金属球的半径伸长了 $\Delta R = 0.001\text{cm}$，求金属球的体积增加的近似值.

解　球的体积 $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

$$\Delta V \approx \frac{4}{3}\pi(R+\Delta R)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi[3R^2\Delta R + 3R(\Delta R)^2 + (\Delta R)^3]$$

当 $|\Delta R|$ 很小时，$\Delta V \approx \mathrm{d}V = 4\pi R^2 \Delta R = 4\pi \times 10^2 \times 0.001 = 0.4\pi$（$\mathrm{cm}^3$）.

2. 函数值的近似计算

由于 $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$，当 $|\Delta x|$ 很小，计算 $f(x_0+\Delta x)$ 的值时，可以忽略掉 $o(\Delta x)$，因此有

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \tag{2.2}$$

使用这个公式时，一般是 $f(x_0)$、$f'(x_0)$ 的值容易计算，而 $f(x_0+\Delta x)$ 不容易计算.

【例 8】 求 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解　这是计算函数值的近似值，因此要用公式（2.2）.

首先设函数 $f(x)$，这类题的规律是将数值 1.05 的位置变成 x，所以函数为 $f(x) = \sqrt{x}$.

$$x_0 = 1,\quad \Delta x = 0.05,\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(x_0) = \frac{1}{2},\quad f(x_0) = 1$$

因为 $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$，所以 $\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{1}{2} \times 0.05 = 1.025$.

【例 9】 计算 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值.

解　设 $f(x) = \sin x$，$x_0 = \frac{\pi}{6}$，$\Delta x = \frac{\pi}{360}$（必须化成弧度），则 $f(x_0) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，$f'(x) = \cos x$，$f'(x_0) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 由公式（2.2）得

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ 30' &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\pi}{360} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{360} \approx 0.5 + 0.0076 = 0.5076\end{aligned}$$

下面介绍几个常用的近似公式：当 $|x|$ 很小时，有下式成立.

（1）$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$；

（2）$\sin x \approx x$（x 用弧度表示）；

（3）$\tan x \approx x$；

（4）$\ln(1+x) \approx x$；

（5）$\mathrm{e}^x \approx 1 + x$.

【例 10】 求下列各式的近似值.

（1）$\sqrt[6]{0.94}$；　（2）$\sqrt[3]{1.03}$；　（3）$\ln 1.04$；　（4）$\ln 0.99$；

（5）$\mathrm{e}^{-0.001}$；　（6）$\tan 0.01$.

解　（1）$\sqrt[6]{0.94} = \sqrt[6]{1-0.06} \approx 1 + \frac{1}{6} \times (-0.06) = 0.99$

（2）$\sqrt[3]{1.03} \approx 1 + \frac{1}{3} \times 0.03 = 1.01$

（3）$\ln 1.04 \approx 0.04$

（4）$\ln 0.99 = \ln(1-0.01) = -0.01$

（5）$\mathrm{e}^{-0.001} \approx 1 - 0.001 = 0.999$

（6）$\tan 0.01 \approx 0.01$

3．误差估计

在生产过程中，经常要测量各种各样的数据，有时数据不容易测量，需要通过测量其他有关的数据，采用某种公式，算出所需的数据．例如，要计算球的体积V，可先用卡尺测量球的直径D，然后根据球的体积公式$V=\frac{1}{6}\pi D^3$算出V．

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测量的数据常常有误差，而根据有误差的数据计算出的结果也会有误差，把它叫作间接测量误差．

下面探讨如何利用微分来估计间接测量误差．

误差有绝对误差和相对误差．

如果某个量的精确值为 A，测得的近似值为a，则称$|A-a|$为a的绝对误差，而绝对误差$|A-a|$与$|a|$的比值$\left|\frac{A-a}{a}\right|$称为$a$的相对误差．

在实际问题中，某个量的精确值A往往无法知道，于是绝对误差和相对误差也就无法求出，但是根据测量仪器的精度，有时能确定误差在某一个范围内．如果某量的精确值为A，测得它的近似值为a，又知道它的误差不超过δ_A，有

$$|A-a|\leqslant\delta_A$$

则称δ_A为测量A的绝对误差限，而$\frac{\delta_A}{|a|}$为测量A的相对误差限．

一般设直接测量的量其测得的数值为x，根据公式$y=f(x)$计算y值时，如果已知测量x的绝对误差限是δ_A，即$|\Delta x|\leqslant\delta_A$，那么，当$y'\neq0$时，$y$的绝对误差的近似值$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'|\cdot|\Delta x|\leqslant|y'|\delta_x$．

于是，用$\delta_y=|y'|\delta_x$代替y的绝对误差限，用$\frac{\delta_y}{|y|}=\left|\frac{y'}{y}\right|\delta_x$代替$y$的相对误差限，以后把它们简称为绝对误差与相对误差．

【例 11】设测得圆钢的直径为$D=60.03\mathrm{mm}$，测量D的绝对误差$\delta_D=0.05\mathrm{mm}$，利用公式$A=\frac{\pi}{4}D^2$，在计算圆钢的截面积时，估计面积的绝对误差与相对误差．

解　A的绝对误差为$\delta_A=|A'|\delta_D=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times60.03\times0.05\approx4.715$（$\mathrm{mm}^2$）．

A的相对误差为$\frac{\delta_A}{A}=\dfrac{\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=\frac{2}{D}\delta_D=\frac{2}{60.03}\times0.05\approx0.17\%$．

加 油 站

【例 12】已知$y=\sin x\cdot\mathrm{e}^{x^2}$，求$\mathrm{d}y$．

解　*方法一：*因为$y'=\cos x\cdot\mathrm{e}^{x^2}+2x\sin x\cdot\mathrm{e}^{x^2}=\mathrm{e}^{x^2}(\cos x+2x\sin x)$，所以$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^2}(\cos x+2x\sin x)\mathrm{d}x$．

方法二：$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(\sin x)+\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2})$

$$= \cos x \cdot e^{x^2} dx + 2x\sin x \cdot e^{x^2} dx = (\cos x + 2x\sin x)e^{x^2} dx$$

【例 13】已知 $y = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{x}$，求 dy .

解　方法一：因为 $y' = \dfrac{\sqrt{x} - 2(1+x)\arctan\sqrt{x}}{2x^2(1+x)}$，所以 $dy = \dfrac{\sqrt{x} - 2(1+x)\arctan\sqrt{x}}{2x^2(1+x)} dx$.

方法二：$dy = \dfrac{x\,d(\arctan\sqrt{x}) - \arctan\sqrt{x}dx}{x^2}$

$$= \frac{\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot x\,dx - \arctan\sqrt{x}dx}{x^2} = \frac{\sqrt{x} - 2(1+x)\arctan\sqrt{x}}{2x^2(1+x)} dx$$

【例 14】已知 $a^n \gg b$，求 $\sqrt[n]{a^n + b}$ 的近似值（$a > 0$）.

解　因为 $\sqrt[n]{a^n + b} = a\sqrt[n]{1 + \dfrac{b}{a^n}}$，$\left|\dfrac{b}{a^n}\right|$很小，故 $\sqrt[n]{1 + \dfrac{b}{a^n}} \approx 1 + \dfrac{b}{na^n}$，于是 $\sqrt[n]{a^n + b} \approx a\left(1 + \dfrac{b}{na^n}\right) = a + \dfrac{b}{na^{n-1}}$.

【例 15】计算 $\sqrt[3]{996}$ 的近似值.

解　$\sqrt[3]{996} = \sqrt[3]{1000 - 4}$，由例 14 知 $a = 10$、$b = -4$、$n = 3$，代入公式有 $\sqrt[3]{996} \approx 10 - \dfrac{4}{3\times 10^2} = 9.9987$.

【例 16】计算 $\arcsin 0.5002$ 的近似值.

解　设 $f(x) = \arcsin x$，$x_0 = 0.5$，$\Delta x = 0.0002$，$f(x_0) = \arcsin 0.5 = \dfrac{\pi}{6}$，$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$，$f'(x_0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$，所以 $\arcsin 0.5002 \approx \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}\sqrt{3} \times 0.0002 \approx 30^\circ 47''$.

【例 17】计算球体积时，要求精确度在 2%以内，则通过测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

解　由球体积公式 $V = \dfrac{1}{6}\pi D^3$ 知 $dV = \dfrac{\pi}{2}D^2\Delta D$，由于 $\left|\dfrac{dV}{V}\right| = \left|\dfrac{\dfrac{\pi}{2}D^2\Delta D}{\dfrac{1}{6}\pi D^3}\right| = 3\left|\dfrac{\Delta D}{D}\right| \leqslant 2\%$，所以 $\left|\dfrac{\Delta D}{D}\right| \leqslant \dfrac{2\%}{3} \approx 0.667\%$.

【例 18】$\sec^2 3x dx = d$（　　）.

解　$\sec^2 3x dx = d\left(\dfrac{\tan 3x}{3} + C\right)$

【例 19】$\sin\omega x dx = d$（　　）.

解　$\sin\omega x dx = d\left(-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega x + C\right)$

【例 20】$\cos x e^{\sin x} dx = d$（　　）.

解　$\cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} d\sin x = d\left(e^{\sin x} + C\right)$

习　题　2.6

一、填空题

1．若 $y = x + \sin x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

2．若 $y = x\sin 2x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

3．若 $y = \ln^2 x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

4．若 $y = \mathrm{e}^{3x}$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

5．若 $y = \arctan 3x^2$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

6．若 $\sin y = x + y$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________.

7．$\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ __________.

8．$\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$ __________.

9．$\arcsin 0.0003 \approx$ __________.

10．$\ln 0.99 \approx$ ____________.

二、单项选择题

1．$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x} + 2\sqrt{x}\right) =$（　　）.

A．$\left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　　B．$\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　　C．$\left(-\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$　　D．$\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

2．$\mathrm{d}\sin^2 x =$（　　）.

A．$\sin 2x\mathrm{d}x$　　B．$\sin x\cos x\mathrm{d}x$　　C．$2\sin x\mathrm{d}x$　　D．$2\cos x\mathrm{d}x$

3．$\mathrm{d}(3^{2x}) =$（　　）.

A．$3^{2x}\ln 3$　　B．$9^x\ln 9\mathrm{d}x$　　C．$3^{2x}\ln 9$　　D．$3^x\ln 9$

4．$\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$（　　）.

A．$\mathrm{d}\left[-\arctan(\sin x) + C\right]$　　B．$\mathrm{d}\left[\arctan(\sin x) + C\right]$

C．$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + C\right)$　　D．$\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} + C\right)$

5．$\dfrac{1}{x+3}\mathrm{d}x = \mathrm{d}$（　　）.

A．$\mathrm{d}\left[\dfrac{1}{(x+3)^2} + C\right]$　　B．$\mathrm{d}\left[-\dfrac{1}{(x+3)^2} + C\right]$

C．$\mathrm{d}\left[\ln(x+3) + C\right]$　　D．$\mathrm{d}\left(\ln|x+3| + C\right)$

6．$\sqrt[3]{0.97} \approx$（　　）.

A．0.98　　B．0.99　　C．0.96　　D．–0.96

7．$\dfrac{1}{x}\ln x\mathrm{d}x = \mathrm{d}$（　　）.

A．$d\left[\ln^2 x+C\right]$　　B．$d\left[-\ln^2 x+C\right]$

C．$d\left[\dfrac{\ln^2 x}{2}+C\right]$　　D．$d\left[-\dfrac{\ln^2 x}{2}+C\right]$

8．$\dfrac{3x}{x^2-x-2}dx=d$（　　）.

A．$d\left[\ln\left|(x-2)^2(x+1)\right|+C\right]$　　B．$d\left(\dfrac{1}{x^2-x-2}+C\right)$

C．$d\left(-\ln\left|x^2-x-2\right|+C\right)$　　D．$d\left(-\dfrac{1}{x^2-x-2}+C\right)$

三、计算题

1．求下列函数的微分.

（1）$y=\tan(1+x^2)$；　　（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；

（3）$y=x^2e^{2x}$；　　（4）$y=x\arctan\dfrac{1}{x}$.

2．$y=x^3\sin\dfrac{1}{x}$，求 $dy\big|_{x=\frac{2}{\pi}}$.

3．$y=\tan^2\left(2x^2+1\right)$，求 dy .

4．求 arctan1.02 的近似值.

本 章 小 结

1．导数

从本章开始正式进入了高等数学的这座殿堂，因为从导数开始讲起，所以导数的概念是个十分重要的概念.

对于函数 $y=f\left(x\right)$，导数 $y'_x=f'_x\left(x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}$，而

$$f'_x\left[g\left(x\right)\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[g\left(x\right)+\Delta x\right]-f\left[g\left(x\right)\right]}{\Delta x} \tag{2.3}$$

下面探讨 $f'_{g(x)}\left[g\left(x\right)\right]$ 与 $f'_x\left[g\left(x\right)\right]$ 的关系．设 $g\left(x\right)=u$，有

$$f'_u\left(u\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(u+\Delta x\right)-f\left(u\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left[g\left(x\right)+\Delta x\right]-f\left[g\left(x\right)\right]}{\Delta x} \tag{2.4}$$

显然式（2.3）与式（2.4）相同.

所以，以后不再区分 $f'_{g(x)}\left[g\left(x\right)\right]$ 与 $f'_x\left[g\left(x\right)\right]$.

例如，对于复合函数 $y=f\left(u\right)$、$u=g\left(x\right)$，有 $y'_x=f'_u\left(u\right)\cdot u'_x=f'_{g(x)}\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)$，以后可写成 $y'_x=f'\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)$.

2．导数与连续及应用

当 $f'(x_0)$ 存在时，我们脑海中应勾勒出一个什么样的画面呢？

（1）当 $f'(x_0)>0$ 时，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$．在 $x\to x_0$ 时：

当 $x>x_0$ 时，分母为正，所以 $f(x)>f(x_0)$．

当 $x<x_0$ 时，分母为负，所以 $f(x)<f(x_0)$．

同理可知 $f'(x_0)<0$，在 $x\to x_0$ 时：

当 $x>x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$．

当 $x<x_0$ 时，$f(x)>f(x_0)$．

这只刻画了 x_0 的一个邻域中的函数值与 $f(x_0)$ 的大小关系，在这个邻域中，其他各点之间的大小关系并没有刻画出来．

（2）$y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定连续．

（3）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 一定存在，且等于 $af'(x_0)$．

当 $a\neq 0$ 时，$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在．

（4）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{\Delta x}$ 一定存在，且等于 $(a-b)f'(x_0)$．

反之 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0+b\Delta x)}{\Delta x}$ 存在，$ab\neq 0$，而 $f'(x_0)$ 未必存在．

例如，$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$．

$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，故 $f'(0)$ 不存在，但 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+a\Delta x)-f(0+b\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1-1}{\Delta x}=0$．

导数 $f'(x)$ 表示函数的变化率，其几何意义为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率，过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$．

【例】求 $f(x)=x^2$，过点 $(0,-1)$ 的切线方程．

解　点 $(0,-1)$ 并不在曲线上，因此首先要求出切点的坐标 $(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$，求出了切点的坐标，就可写出切线方程 $y-x_0^2=f'(x_0)(x-x_0)$．

点 $(0,-1)$ 在该切线上，代入方程，得 $-1-x_0^2=2x_0(0-x_0)$．

解上式得 $x_0=\pm 1$．

把 $x_0=-1$、$x_0=1$ 分别代入切线方程得 $y-1=-2(x+1)$，即 $y=-2x-1$；或 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$．

若 $f'(x_0)$ 存在，则过点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线一定存在；反之，若切线存在，则必有 $f'(x_0)$ 存在，或 $f'(x_0)=\infty$．

3．几种类型的求导方法

在我们所学的高等数学中，遇到的函数不外乎以下四种：

（1）显函数；

（2）隐函数；

（3）参数式；

（4）分段函数.

回想一下，这些函数的导数求法是这一章的基础，也是高等数学的基础，必须掌握．如果遇到 $y=\log_{(x^2+1)}(x^4+1)$，你会求导吗？

换成更一般的形式 $y=\log_{f(x)}g(x)$，已知 $f(x)$ 与 $g(x)$，求 y'.

用换底公式，$y=\dfrac{\ln g(x)}{\ln f(x)}$ 两边对 x 求导，得

$$y'=\frac{\dfrac{g'(x)}{g(x)}\ln f(x)-\dfrac{f'(x)}{f(x)}\ln g(x)}{\ln^2 f(x)}=\frac{f(x)g'(x)\ln f(x)-g(x)f'(x)\ln g(x)}{f(x)g(x)\ln^2 f(x)}$$

4．微分及误差估计

本章最后的一个内容就是微分，一定要掌握好微分的实质.

微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 就是函数增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 的近似值，但其前提要求 $|\Delta x|$ 很小，且 $f'(x)\neq 0$．$|\Delta x|$ 越小，微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 越接近 Δy，为此要掌握好微分的应用.

误差估计有三要素：

（1）自变量的绝对误差限 δ_x，简称自变量绝对误差；

（2）函数 y；

（3）导数 y'.

y 的绝对误差 $|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'||\Delta x|\leqslant|y'|\delta_x$，用 $|y'|\delta_x$ 表示 y 的绝对误差 δ_y，y 的相对误差为 $\dfrac{\delta y}{|y|}=\left|\dfrac{y'}{y}\right|\delta_x$.

此处有一个重要的思路，就是要掌握好微分的逆向思维：

已知函数 $y=f(x)$，求 $\mathrm{d}f(x)$ 是很好求的.

如 $\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x}=\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)'\mathrm{d}x=\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$.

但要逆向求 $\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$（　　　）时很困难，这实际上是第 5 章不定积分的基础，因此要掌握好前面给出的一些公式.

5．微分、导数、连续极限关系

一元函数的关系如下：

函数可微 $\Leftrightarrow$ 函数可导 $\Rightarrow$ 函数连续 $\Rightarrow$ 函数有极限 $\Rightarrow$ 函数左、右极限存在

可见，函数可导是函数连续的充分条件，函数连续是可导的必要条件，由以上关系式可一目了然.

复 习 题 2

一、填空题

1．若 $f(x+1)=x^2+1$，则 $f'(x)=$__________.

2．若 $y=\arcsin(\sin x)$，则 $y'=$__________.

3．$y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $y'=$__________.

4．若 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$（$n\geqslant 2$），则 $f'(0)=$__________.

5．若 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0\\ \ln(1+x), & x>0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__________.

6．若 $f'(x_0)\neq 0$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0+a\Delta x)-f(x_0)}=2$，则 $a=$__________.

7．若 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$__________.

8．若 $y=\cos^2 x\cdot\ln x$，则 $y''=$__________.

9．若 $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

10．若 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$__________.

二、单项选择题

1．$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$，则 $f(0)=$（　　）.

A．$f(0)=1$ 且 $f'(0)=2$　　B．$f(0)=1$ 且 $f'(0)$ 不存在

C．$f(0)=2$ 且 $f'(0)=1$　　D．$f(0)=2$ 且 $f'(0)$ 无法确定

2．$f(x)=x^2\cos x$，则 $f^{(15)}(x)$ 是（　　）.

A．偶函数　　B．奇函数　　C．非奇非偶　　D．无法确定

3．若 $f(x)$ 可导且 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是（　　）.

A．与 Δx 等价的无穷小　　B．与 Δx 同阶的无穷小

C．与 Δx 低阶的无穷小　　D．与 Δx 高阶的无穷小

4．设 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$．其中，$a\neq 0$、$b\neq 0$，则（　　）.

A．$f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导　　B．$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$

C．$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$　　D．$f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$

5．设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}$，$h'(1)=1$、$g'(1)=2$，则 $g(1)=$（　　）.

A．$-1-\ln 2$　　B．$-1-\ln 3$　　C．$1-\ln 2$　　D．$1-\ln 3$

6．设$\begin{cases} x = f(t) - \pi \\ y = f(e^{3t} - 1) \end{cases}$，其中 f 可导，且 $f'(0) \neq 0$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0} =$（　　）.

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

7．下列极限均存在，则（　　）正确.

A．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$　　B．$\lim\limits_{n\to \infty}\dfrac{f\left(x_0 + \dfrac{1}{n}\right) - f(x_0)}{n} = f'(x_0)$

C．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$　　D．$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2f'(x_0)$

8．函数 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a、b 是常数，则（　　）.

A．$a = 0$、$b = -3$　　B．$a = -1$、$b = -1$　　C．$a = 1$、$b = -3$　　D．$a = 0$、$b = -1$

9．$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处的切线方程为（　　）.

A．$3x - y - 6 = 0$　　B．$2x - y - 7 = 0$　　C．$3x - y - 7 = 0$　　D．$x - y - 7 = 0$

10．对于任意的 x 都有 $f(-x) = -f(x)$，且 $f'(-x_0) = -k \neq 0$，则 $f'(x_0) =$（　　）.

A．$-k$　　B．k　　C．$-\dfrac{1}{k}$　　D．$\dfrac{1}{k}$

11．下列函数中（　　）的导数等于 e^{2x}.

A．e^{2x}　　B．$-e^{2x}$　　C．$-\dfrac{1}{2}e^{2x}$　　D．$\dfrac{1}{2}e^{2x}$

12．$y = |1 - x|$，在 $x = 1$ 处（　　）.

A．不连续　　B．连续，但不可导

C．连续且可导，但导数不连续　　D．连续且可导，导数也连续

三、计算题

1．已知物体的运动规律为 $s = t^3(\text{m})$，求该物体在 $t = 2\text{s}$ 时的速度.

2．在抛物线 $y = x^2$ 上取横坐标为 $x_1 = 1$、$x_2 = 3$ 的两点，作过这两点的割线．问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

3．曲线 $y = x^2$ 上哪一点的切线与直线 $y = 4x - 1$ 平行？

4．设 $f(t)$ 二阶可导，且 $f''(t) \neq 0$，由参数方程$\begin{cases} x = f(t) - tf'(t) \\ y = t^2 f'(t) \end{cases}$确定的函数为 $y = y(x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

5．证明双曲线 $xy = a^2$（$a > 0$）上任意一点处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积是一个常数 $2a^2$.

6．设 $y = \ln(1 + 3^{-x})$，求 dy.

7．设 $f(x)$ 满足 $af(x) + bf\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{c}{x}$，且 $f(x)$ 可导，式中 a、b、c 都是常数，且 $|a| = |b|$，求 $f'(x)$.

8．曲线 $y^2+2xy+3=0$ 上哪点的切线与 x 轴正向所夹的角为 $\dfrac{\pi}{4}$？

9．求 $\begin{cases} x=2\mathrm{e}^t \\ y=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应点处的切线方程及法线方程.

第 3 章　中值定理与导数的应用

导数作为函数的变化率，刻画了函数的变化性态，因此是研究函数的一个有力工具，本章将应用导数来了解函数在区间上的整体性态. 为此，首先将介绍微分学基本定理——中值定理. 它是从函数局部性质推断整体性态的有力工具. 然后通过导数来研究函数及其曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题. 本章以微分学的基本定理——微分中值定理及应用导数解决诸如：函数不定式的极限，判断函数的单调性和凹凸性，求函数的极值、最大（小）值，函数作图等问题.

3.1　微分中值定理

3.1.1　费马（Fermat）定理

定理 3.1　设 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值，若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)=0$，如图 3.1 所示.

定义 3.1　设函数 $y=f(x)$，若 $f'(x_0)=0$，则称 x_0 为函数的驻点（或临界点、稳定点）.

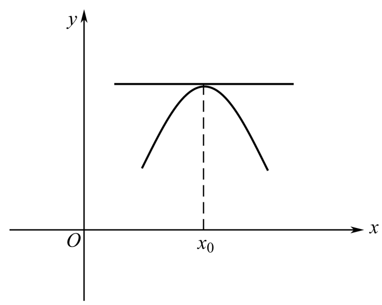


图 3.1

3.1.2　罗尔定理

定理 3.2　设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 内连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）$f(a)=f(b)$.

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

其几何意义如图 3.2 所示.

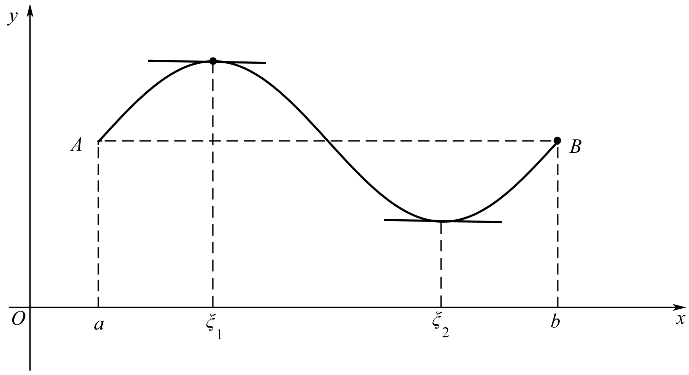


图3.2

这里需要说明的是：定理中的三个条件必须同时满足，缺一不可.

如 $y=|x|$，（$-1\leqslant x\leqslant 1$），函数 y 只满足定理中的条件（1）、（3），而不满足条件（2）. y 在 $x=0$ 处不可导，因此不一定能保证定理的结论成立.

定理中的三个条件是结论的充分条件，在某些情况，某个函数不同时具备定理中的三个条件，但曲线 $y=f(x)$ 仍可能有水平切线.

【例 1】函数 $y=\ln(1+x^2)$ 在区间 $[-1,1]$ 上是否满足罗尔定理？如果满足罗尔定理，请求出定理中的 ξ 值.

解　$y=\ln(1+x^2)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，即 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故 y 在 $[-1,1]$ 上连续.

又 $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$x\in\mathbf{R}$，故在 $(-1,1)$ 内可导，$y(-1)=y(1)=\ln 2$，所以 $y=\ln(1+x^2)$ 在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理，令 $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}=0\Rightarrow x=\xi=0$.

【例 2】不求导数，判断函数 $f(x)=(x^2-3x+2)(x-3)$ 的导数有几个零点及这些零点所在的范围.

解　因为 $f(1)=f(2)=f(3)=0$，所以 $f(x)$ 在闭区间 $[1,2]$ 和 $[2,3]$ 上均满足罗尔定理的三个条件，从而在 $(1,2)$ 内至少存在一点 ξ_1，使 $f'(\xi_1)=0$，即 ξ_1 是 $f'(x)$ 的一个零点.

又在 $(2,3)$ 内至少存在一点 ξ_2，使 $f'(\xi_2)=0$，即 ξ_2 是 $f'(x)$ 的一个零点.

又因为 $f'(x)$ 为二次多项式，最多只能有两个零点，故 $f'(x)$ 恰好有两个零点，分别在区间 $(1,2)$ 和 $(2,3)$.

3.1.3　拉格朗日（Lagrange）中值定理

法国大数学家拉格朗日在年轻时学习罗尔定理，就感到罗尔定理有一个缺点，就是第三个条件 $f(a)=f(b)$.

初等函数很容易满足前两个条件，唯独第三个条件不易满足，因此拉格朗日想把第三个条件去掉，这时结论会变成什么样呢？

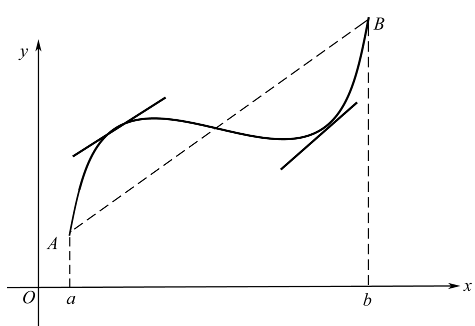


图 3.3

下面用几何意义加以说明.

将图 3.2 旋转一下，使 $f(a)\neq f(b)$，变成如图 3.3 所示的情形.

观察图 3.2 与图 3.3，什么关系没有改变？可以发现无论如何旋转，弦 AB 与切线的平行关系永远不变，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

定理 3.3　设函数 $y=f(x)$ 满足下列条件：

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导.

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{3.1}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\ \xi\in(a,b) \tag{3.2}$$

【例 3】设 $f(x)=x^3+1$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，求定理中的 ξ 值.

解　$f'(x)=3x^2$，由 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 得 $3\xi^2=\dfrac{2-1}{1-0}$，$\xi=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（舍掉负数），所以 $\xi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

在拉格朗日中值定理中令 $f(a)=f(b)$，则有 $f'(\xi)=0$.

因此，拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广，而罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例.

在公式（3.2）中，令 $\xi=a+\theta(b-a)$，$0<\theta<1$，于是拉格朗日中值定理的结论又可以写成等价的形式

$$f(b)=f(a)+f'\left[a+\theta(b-a)\right](b-a) \tag{3.3}$$

称公式（3.3）为有限增量公式.

拉格朗日中值定理有以下两个重要推论：

推论 3.1　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

证　$\forall x_1<x_2\in I$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\,(x_2-x_1)$$

由于 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，所以 $f'(\xi)=0$，$\xi\in(x_1,x_2)\subseteq I$，故 $f(x_1)=f(x_2)$，$f(x)$ 在 I 上是一个常数.

【例 4】验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

解　$y=4x^3-5x^2+x-2$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，所以满足拉格朗日中值定理条件，令 $\dfrac{y(1)-y(0)}{1-0}=y'(\xi)$，即 $12\xi^2-10\xi+1=0$，得 $\xi=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{12}\in(0,1)$，故拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上是正确的.

【例 5】证明函数 $f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

证　$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$，所以 $f(x)$ 为常数.

令 $x=1$，$\arctan 1+\operatorname{arccot} 1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$.

推论 3.2　如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\equiv g'(x)$，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a,b) 内相差一个常数 C，即 $f(x)=g(x)+C$.

证　设 $F(x)=f(x)-g(x)$ 在 (a,b) 内处处可导，且 $F'(x)=f'(x)-g'(x)=0$，于是 $F(x)$ 在 (a,b) 内为常数，即 $f(x)-g(x)=C$，$f(x)=g(x)+C$.

【例 6】证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

证　设 $f(x)=\ln(1+x)$，显然 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)\,(x-0)\quad(0<\xi<x)$$

因为

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

故上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}\qquad (0<\xi<x)$$

由于 $0<\xi<x$，所以 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$，即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

3.1.4　柯西（Canchy）中值定理

柯西是法国大数学家，他在年轻时学习拉格朗日中值定理，便考虑如何推广拉格朗日中值定理，经过研究，终于有了定理 3.4.

定理 3.4　如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件:

（1）在闭区间 $[a,b]$ 内连续;

（2）在开区间 (a,b) 内可导;

（3）对任一 $x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$.

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

当 $g(x)=x$ 时，便是拉格朗日中值定理，所以柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，而拉格朗日中值定理又是柯西中值定理的特例.

本节的 4 个定理都描述这样一个几何事实，在一条光滑曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 上至少有一点的切线与连接此线段的两端点的弦 $\overline{AB}$ 平行.

加 油 站

【例 7】证明方程 $x^3-3x+1=0$ 在 $[0,1]$ 内不可能有两个不同的根.

证　设 $f(x)=x^3-3x+1$，用反证法，不妨设有两个不同的根 x_1 及 x_2，$0<x_1<x_2<1$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理的条件，所以至少有一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(0,1)$ 使 $f'(\xi)=0$，即 $3\xi^2-3=0\Rightarrow\xi=\pm1$，与 $\xi\in(0,1)$ 矛盾，故方程 $x^3-3x+1=0$ 不可能在 $(0,1)$ 内有两个不同的根.

【例 8】设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，$\forall x\in(a,b)$ 有 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个驻点.

证　用反证法，若 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个驻点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，则 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$，函数 $f'(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足罗尔定理的条件，所以至少有一点 $\xi\in(x_1,x_2)\subseteq(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$，这与条件 $f''(x)<0$ 矛盾，故 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多有一个驻点.

【例 9】证明方程 $\sin x+x\cos x=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有实根.

证　由于 $(x\sin x)'=\sin x+x\cos x$，因此设 $f(x)=x\sin x$，$x\in[0,\pi]$. 易知 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上

连续且可导，$f(0)=f(\pi)=0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理的条件，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使 $f'(\xi)=0$，即 $\sin\xi+\xi\cos\xi=0$.

故方程 $\sin x+x\cos x=0$ 在 $(0,\pi)$ 内必有实根.

【例 10】 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证　显然，$f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且对任意的 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$F'(x)=1-\sin x\neq 0$，可见 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上满足柯西中值定理的条件，令 $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f(0)}{F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-F(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，即

$$\frac{\cos\xi}{1-\sin\xi}=\frac{1}{\dfrac{\pi}{2}-1}=\frac{2}{\pi-2} \qquad ①$$

令 $\xi=\dfrac{\pi}{2}-t$，则①变为

$$\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2}{\pi-2},\ \tan\frac{t}{2}=\frac{\pi-2}{2} \qquad ②$$

显然②有解，且其解 $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，因为 $\xi=\dfrac{\pi}{2}-t$，所以方程①有解，其解 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，故柯西中值定理对函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上正确.

【例 11】 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 证明：必存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(1)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

证　由于 $[xf(x)]'=f(x)+xf'(x)$，因此设 $F(x)=xf(x)$，显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，有 $F(1)-F(0)=F'(\xi)$，$\xi\in(0,1)$，即 $f(1)=f(\xi)+\xi f'(\xi)$.

思考：设 $F(x)=x^n f(x)$，结论应变成什么样？

【例 12】 设 $0<a<b$，证明 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

证　设 $f(x)=\ln x$，显然 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且可导，所以 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理的条件，有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，即 $\ln b-\ln a=\dfrac{1}{\xi}(b-a)$，$a<\xi<b$. $\dfrac{b-a}{b}<\ln b-\ln a<\dfrac{b-a}{a}$，即 $\dfrac{b-a}{b}<\ln\dfrac{b}{a}<\dfrac{b-a}{a}$.

【例 13】 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，不用求导，证明方程 $f'''(x)=0$ 只有一个实根.

证　$f(x)$ 在 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$ 上均满足罗尔定理，于是 $\xi_1\in(1,2)$，有 $f'(\xi_1)=0$；$\xi_2\in(2,3)$，有 $f'(\xi_2)=0$；$\xi_3\in(3,4)$，有 $f'(\xi_3)=0$.

$f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$、$[\xi_2,\xi_3]$ 上分别满足罗尔定理，于是 $f''(x_1)=0$，$x_1\in(\xi_1,\xi_2)$；$f''(x_2)=0$，

$x_2 \in (\xi_2, \xi_3)$.

而函数 $f''(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上又满足罗尔定理，所以至少有一点 $\xi \in (1,4)$，使 $f'''(\xi)=0$，即 ξ 是 $f'''(x)=0$ 的一个实根.

又 $f(x)$ 是四次多项式，而 $f'''(x)$ 是一次函数，一次方程只有一个实根，所以方程 $f'''(x)=0$ 只有一个实根.

【例 14】证明方程 $e^x - x^2 - 3x - 1 = 0$ 有且仅有 3 个根.

证　函数 $f(x) = e^x - x^2 - 3x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有任意阶连续导数，且 $f(-3) < 0$，$f(-1) > 0$，$f(1) < 0$，$f(4) > 0$．由零点定理知在 $(-3,-1)$、$(-1,1)$、$(1,4)$ 这 3 个区间上均存在零点，现设函数还有第 4 个零点，则由例 13 可知 $f'''(x)$ 至少有 1 个零点，与 $f''(x) = e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上不可能有零点相矛盾．所以方程 $e^x - x^2 - 3x - 1 = 0$ 有且仅有 3 个根.

【例 15】若 $xf'(x) + f(x) \equiv 0$，且 $f(1) = 2$，求 $f(2)$.

解　因为 $xf'(x) + f(x) \equiv 0$，所以 $[xf(x)]' \equiv 0$．$xf(x) = C$.

由于 $f(1) = 2$，所以 $C = 2$，即 $xf(x) = 2$.

令 $x = 2$，所以 $f(2) = 1$.

【例 16】设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且对于 (a,b) 内的所有 x，有 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$．求证：如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内有两个零点，则介于这两个零点之间，$g(x)$ 至少有一个零点.

证　用反证法．设 x_1、x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，而 $g(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上无零点，令 $\Phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $\Phi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足罗尔定理的条件，至少有一点 $\xi \in (x_1, x_2)$，使 $\Phi'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi)}{g^2(\xi)} = 0$，这与 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) \neq 0$ 矛盾，故介于 $f(x)$ 在 (a,b) 内的两个零点之间，$g(x)$ 至少有一个零点.

【例 17】设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，$0 < a < b$．证明：在 (a,b) 上存在一点 ξ，满足 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \dfrac{b}{a}$.

证　由结论提示，变形结论为 $\dfrac{f(b) - f(a)}{\ln b - \ln a} = \dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，可看出 $\dfrac{1}{\xi}$ 是 $\ln x$ 的导数在 ξ 点的值.

令 $g(x) = \ln x$，显然 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不为 0，在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 应用柯西中值定理，$\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}}$，$a < \xi < b$，即 $f(b) - f(a) = \xi f'(\xi) \ln \dfrac{b}{a}$，$a < \xi < b$.

习　题　3.1

一、填空题

1．$f(x) = \ln \sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，则定理中的 $\xi =$ ＿＿＿＿＿＿.

2．$f(x)=x^2+2x+C$，在$[k,m]$上满足拉格朗日中值定理的条件，则定理中的$\xi=$__________.

3．函数$f(x)=x^3$、$g(x)=x^2$在区间$[1,2]$上满足柯西中值定理的条件，则定理中的$\xi=$__________.

4．函数$f(x)=x(x+1)(x+3)$不用求导，指出方程$f'(x)=0$有_______个实根.

5．$y=x\sqrt{5-x}$在$[0,5]$上满足罗尔定理的条件，则定理中的$\xi=$__________.

6．若$2f(x)f'(x)-g'(x)\equiv 0$，则$f(x)$与$g(x)$满足_________关系.

7．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的导数为常数a，且$f(1)=b$，则$f(x)=$_________.

二、单项选择题

1．在区间$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的函数是（　　）.

A．$f(x)=2|x|$　　B．$f(x)=x^2-2x-1$

C．$f(x)=\dfrac{1}{x^2}$　　D．$f(x)=1+x^2$

2．设a、b是方程$f(x)=0$的两个不同的根，$f(x)$在$[a,b]$上连续，(a,b)内可导，则$f'(x)=0$在(a,b)内（　　）.

A．只有一个实根　　B．至少有一个实根

C．没有实根　　D．至少有两个实根

3．设函数$f(x)$在区间(a,b)内可导，x_1和x_2是(a,b)内的任意两点，且$x_1<x_2$，则至少存在一点ξ，下列等式中成立的是（　　）.

A．$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$

B．$f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，$\xi\in(x_1,b)$

C．$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，$\xi\in(x_1,x_2)$

D．$f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，$\xi\in(a,x_2)$

4．下列函数在所给区间上满足罗尔定理条件的是（　　）.

A．$f(x)=\dfrac{3}{2x^2+1}$　$[-1,1]$　　B．$f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$　$[-1,1]$

C．$f(x)=x^2+1$　$[0,1]$　　D．$f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ x^2+x, & x\leqslant 0\end{cases}$　$[-1,1]$

5．函数$f(x)=\dfrac{1}{2x}$满足拉格朗日中值定理条件的区间是（　　）.

A．$[-2,2]$　　B．$[1,2]$　　C．$[-2,0]$　　D．$[-1,1]$

6．若函数$f(x)$、$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且满足$3f^2(x)f'(x)-2g(x)g'(x)\equiv 0$，则$f(x)$与$g(x)$的关系是（　　）.

A．$f(x)=g(x)+C$　　B．$f^3(x)=2g(x)+C$

C．$f^3(x)=g(x)+C$　　D．$f^3(x)=g^2(x)+C$

三、计算题

1．证明$f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$是个常数（$x\geqslant 1$），并求出这个常数.

2．设 $a>b$，证明当 $n>1$ 时，$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$．

3．证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根．

3.2　洛必达法则

在学习第 1 章极限时，其难点是 $\frac{0}{0}$ 与 $\frac{\infty}{\infty}$ 等不定型的计算，这自然引起了数学家的注意，因此就有了下面的洛必达法则．

定理 3.5　设函数 $f(x)$、$g(x)$ 满足以下条件：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$（$x_0$ 也可是 ∞）；

（2）在 x_0 的去心邻域 $\overset{o}{U}(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x)\neq 0$；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无穷大）．

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$．

【例 1】 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$．

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

【例 2】 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$．

解　$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注： 求极限时要将确定型因子及时分离出来，这样可以减少求导带来的麻烦，每步都应确定极限的类型，只有 $\frac{0}{0}$ 才能用洛必达法则，因此洛必达法则可以多次使用．

【例 3】 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{\tan^3(x-1)}$．

解　$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{\tan^3(x-1)}&\overset{\tan^3(x-1)\sim(x-1)^3}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^4-2x^3+2x-1}{(x-1)^3}\\&\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-6x^2+2}{3(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{12x^2-12x}{6(x-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{24x-12}{6}=2\end{aligned}$$

【例 4】 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$．

解　$\sin x\sim x$，但在分子中是差的形式，因此绝不允许代替．

而分母 $\ln\left(1+x^3\right)\sim x^3$ 可以用 x^3 来代替.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\ln\left(1+x^3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

注：在求极限之前，可用简单的无穷小代替与其等价的复杂的无穷小，然后再应用洛必达法则，但要注意只有乘积的时候，才能用等价无穷小代替，而和差时绝不允许，切记！

定理 3.6　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足以下条件：

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$（$x_0$ 也可是 ∞）；

（2）$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或 ∞）.

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$（或 ∞）.

这两个定理统称为“洛必达法则”，可以用柯西定理来证明.

【例 5】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}=0$

【例 6】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$

【例 7】计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{x}\ln x}{1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^n x}{x}=0$，无论 n 多么大，这个极限都是 0，同理 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}=0$.

当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x$、x、e^x 都是无穷大，但指数函数 e^x 增长的速度最快，幂函数 x 增长的速度居中，而对数函数 $\ln x$ 增长的速度最慢.

第 1 章讲过不定型共有以下 7 种：

（1）$\dfrac{0}{0}$；（2）$\dfrac{\infty}{\infty}$；（3）$0\cdot\infty$；（4）$\infty-\infty$；（5）1^∞；（6）0^0；（7）∞^0.

遇到（1）、（2）这两种可直接用洛必达法则来解决.

下面介绍遇到另外 5 种，如何变成（1）、（2）这两种形式.

- $0\cdot\infty$ 型.

遇到$0\cdot\infty$型，可以将其化成$\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}$或$\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}$型，但在一个具体问题中，应该化成上面哪种形式呢？将简单的变成倒数放到分母上去.

【例 8】求$\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\ln x$.

解　这是$0\cdot\infty$型，两个因子x^2与$\ln x$，谁简单？当然是x^2.

$$\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-2}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}x^2=0$$

【例 9】求$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$.

解　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，所以这是$\infty\cdot 0$型，显然$x$简单，故

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\overset{0\cdot\infty}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$$

【例 10】求$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}$

解　因为$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$，所以这是$\infty\cdot 0$型，但是$x$与$e^{-x}$谁简单？许多学生都以为$x$简单，其实错了，应该是$e^{-x}$的倒数（即$e^{x}$）简单.

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$$

如果方向错了，就会越做越烦琐，即$\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}\overset{0\cdot\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-e^{-x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}$就越做越烦琐.

此题告诉我们，如果开始选择错了，会越做越麻烦，遇到这种情况时，要改变方向.

● $\infty-\infty$型.

这种类型采用三种方法：①通分；②有理化；③提取公因子.

【例 11】求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

解　这是$\infty-\infty$型未定式，通分后可转化成$\dfrac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\frac{x-1}{x}+\ln x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

【例 12】求$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

解　显然这是$\infty-\infty$型，因为有根式，所以要进行有理化.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}}$$（分子、分母都除以$-x$）

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{2}$$

【例 13】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\frac{1}{x}\right)$.

解　显然这是 $\infty-\infty$ 型，可以提取公因子.

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2-x^2\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

- $1^{\infty}=e^{\infty\ln 1}=e^{\infty\cdot 0}$.
- $0^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$.
- $\infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$.

因此，（5）、（6）、（7）这三种类型最后都化成了 $0\cdot\infty$ 型.

【例 14】求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$.

解　这是 0^0 型.

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=1$$

【例 15】求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$.

解　设 $y=x^{\sin x}$，则 $\ln y=\sin x\ln x$.

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}(\sin x\cdot\ln x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0$$

由 $y=e^{\ln y}$，有 $\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\ln y}$，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=e^0=1$.

【例 16】求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$.

解　这是 1^{∞} 型.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\frac{2}{\pi}\arctan x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arctan x}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$$

至此，我们看到了洛必达法则的威力，它是解决不定型的最有力的武器．但是洛必达法则也不是万能的．请看下例.

【例 17】求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

解　这是$\frac{\infty}{\infty}$型，用洛必达法则有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$，不存在（但不是$\infty$）.

洛必达法则第（2）条要求 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或∞），而此题 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ 不存在，因此洛必达法则失效.

此题可以分子、分母都除以x，得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\cos x}{x}}=1$$

注：以后遇到$x\to\infty$时，分子、分母中既有x的多项式，又有三角函数$\sin x$、$\cos x$之和时，千万不要用洛必达法则.

【例 18】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

解　这是$\frac{\infty}{\infty}$型，不用洛必达法则.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

而用洛必达法则，就陷入了一个难以自拔的怪圈：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

以后遇到这类极限，就不要用洛必达法则了，洛必达法则虽然不是万能的，但有时它是解决不定型极限的最有力的工具.

加 油 站

【例 19】 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}$.

解　$$\lim_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{3x^2\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3\cos^2 x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{2\cos x(-\sin x)}{2x}$$
$$=-\frac{1}{3}$$

【例 20】 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

解　$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$$

【例 21】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\cdot\dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}}{1}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$$

【例 22】求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 2x}$.

解　$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\tan 5x}{\ln\tan 2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\tan 5x}\cdot\dfrac{5}{\cos^2 5x}}{\dfrac{1}{\tan 2x}\cdot\dfrac{2}{\cos^2 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\times\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 5x}\lim_{x\to 0^+}\times\frac{\tan 2x}{\tan 5x}=\frac{5}{2}\times\frac{2}{5}=1$$

【例 23】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解　$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot x^2}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1$$

求极限过程中，注意用等价无穷小代替.

【例 24】求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$.

解　由于 $(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=\mathrm{e}^{\tan\frac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)}$，且

$$\lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi}{2}x=1,\quad \lim_{x\to 1}\left[\tan\frac{\pi}{2}x\cdot\ln(2-x)\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi}$$

因此，$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=\mathrm{e}^{\frac{2}{\pi}}$.

这也是一种解题方式，如直接在指数上求导就太烦琐了.

【例 25】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}$.

解　若直接用“$\dfrac{0}{0}$”型洛必达法则，则得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{10x^9}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{5x^{12}}$，越来越复杂，不可行.

先用变量替换，令 $\dfrac{1}{x^2}=t$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{10}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{t^{-5}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^5}{e^t}\ \left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{5t^4}{e^t}=\cdots=\lim_{t\to+\infty}\frac{5!}{e^t}=0$$

习　题　3.2

一、填空题

1．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=$____________.

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(5^x+3^x\right)-\ln 2}{x}=$____________.

3．$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{e^x-3x}{e^x-2x}=$____________.

4．$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\cot x}=$____________.

5．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x-\dfrac{1}{x}\right)=$____________.

6．$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=$____________.

7．$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x=$____________.

8．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\sin x^2}=$____________.

二、单项选择题

1．下列极限能使用洛必达法则的是（　　）.

A．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$　　B．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-\cos x}{3x+4\sin x}$

C．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\sin 3x}$　　D．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}$

2．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\tan x}=$（　　）.

A．1　　B．2　　C．3　　D．0

3．$\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(1-x)=$（　　）.

A．0　　B．-1　　C．1　　D．2

4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-e^x+2x}{x-\sin x}=$（　　）.

A．0　　B．-1　　C．-2　　D．-3

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x^2}{2x^6}=$（　　）.

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{5}$　　C．$\frac{1}{4}$　　D．$\frac{1}{12}$

6．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{2x}=$（　　）．

A．0　　B．1　　C．-1　　D．不存在

三、求下列极限．

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}\right]$；　　2．$\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\sin x}$；

3．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$；　　4．$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$；

5．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$；　　6．$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$．

3.3　函数的单调性及极值

这节利用导数来讨论函数的单调性及极值．

3.3.1　函数的单调性

定理 3.7　设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加．

证　$\forall x_1<x_2\in[a,b]$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)，\ \xi\in(a,b)$$

由于 $f'(x)>0$，所以 $f'(\xi)>0$．

于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是增函数．

定理 3.8　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，如果 $\forall x\in(a,b)$，$f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数．

证　$\forall x_1<x_2\in[a,b]$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)<0，\ \xi\in(x_1,x_2)\subseteq[a,b]$$

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是减函数．

注：（1）$y=f(x)$ 在区间 I 上，$f'(x)\geqslant 0$，且等于 0 的点是离散点，则 $f(x)$ 在区间 I 上是增函数．

（2）$y=f(x)$ 在区间 I 上，$f'(x)\leqslant 0$，且等于 0 的点是离散点，则 $f(x)$ 在区间 I 上是减函数．

【例 1】 $y=x-\arctan x$，证明函数 y 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增加的．

证　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $y'=1-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x^2}{1+x^2}\geqslant 0$，且等于 0 的点只有 $x=0$，所以 y 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数．

【例 2】设 $y=\ln(1-x)$，证明 y 在 $(-\infty,1)$ 是减函数.

解　$\forall x<1$，$y'=\dfrac{-1}{1-x}<0$，所以 y 在 $(-\infty,1)$ 内是减函数.

在定义域内是全增或全减的函数是很少的，多数是有增有减，因此下面将介绍如何求函数的单调区间，如图 3.4 所示.

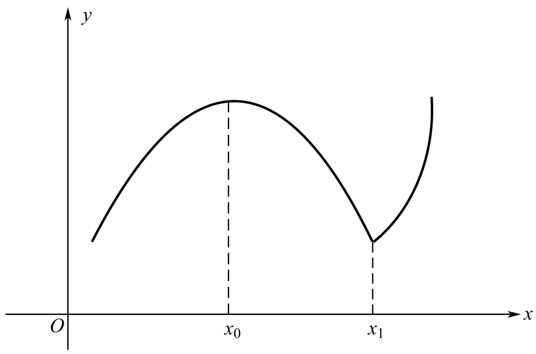


图 3.4

$x<x_0$，函数增，$f'(x)>0$；$x_0<x<x_1$，函数减，$f'(x)<0$；$x>x_1$，函数单调增加，$f'(x)>0$.

一般导数由正变负（或由负变正）往往要经过 $f'(x_0)=0$，所以使导数为0的点，一定要引起我们的注意.

而函数在点 x_1 处是尖点，导数不存在，所以导数不存在的点也同样要引起我们的注意.

求函数单调区间的步骤如下.

（1）写出函数的定义域.

（2）求出 $f'(x)=0$ 的点.

（3）找出 $f'(x)$ 不存在的点.

或将适合（2）、（3）的点叫可疑点.

（4）找出函数的间断点.

可疑点是否是单调区间的分界点，其标准如下：

设可疑点 $x_1<x_2<\cdots<x_n$.

① x_i 的左右一阶导数变号，则 x_i 就是分界点；

② x_i 的左右一阶导数不变号，则 x_i 就不是分界点.

【例 3】求函数 $f(x)=x-3x^{\frac{1}{3}}$ 的单调区间.

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f'(x)=1-x^{-\frac{2}{3}}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$. 而 $x=0$ 时，导数不存在. 因此，单调区间见表 3.1.

表 3.1

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	0	↘	−2	↗

由表 3.1 知，区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 为 $f(x)$ 的单调增加区间，$(-1,1)$ 是 $f(x)$ 的单调减少区间.

由表 3.1 还能得出 $f(x)$ 的一个重要的值——函数的极值，函数在 $x=-1$ 处取得极大值，在 $x=1$ 处取得极小值.

极大值 $f(-1)=2$，极小值 $f(1)=-2$.

3.3.2　函数的极值

由费马定理可知，如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，那么 $f'(x_0)=0$.

可导函数的极值点一定是驻点，反之未必．例如，$y=x^3$，$y'=3x^2$，$y'(0)=0$，$x=0$ 是驻点，但 $x=0$ 却不是函数的极值点．

定理 3.9（第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\overset{O}{U}(x_0,\delta)$ 内可导.

（1）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

（2）若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

（3）若 $x\in\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有取得极值.

【例 4】讨论函数 $f(x)=x^3-3x$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=\pm1$．用点 $x=1$ 及 $x=-1$ 将 $f(x)$ 的定义域分成三个部分区间，在每个部分区间内确定 $f'(x)$ 的符号，判定函数的单调性，列表讨论如下（见表 3.2）.

表 3.2

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(1,+\infty)$ 上单调增加，在区间 $(-1,1)$ 上单调减少.

【例 5】求函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 的单调区间及极值.

解　$\forall x\neq0$，有 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=\pm1$.

函数的单调区间、极值见表 3.3.

表 3.3

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	无定义	↘	极小值	↗

极大值 $f(-1)=-2$，极小值 $f(1)=2$.

【例 6】求函数 $f(x)=x^2-\ln x^2$ 的单调区间及极值.

解　$\forall x\neq0$，$f'(x)=2x-\dfrac{2x}{x^2}=2x-\dfrac{2}{x}$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1$、$x_2=1$.

$f(x)$ 单调区间、极值见表 3.4.

表 3.4

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	+	不存在	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗	无定义	↘	极小值	↗

极小值 $f(-1)=1$，极小值 $f(1)=1$.

【例 7】设 $y=f(x)$，如果 $f'(x_0)=0$， $f''(x_0)<0$，证明 $f(x_0)$ 为极大值.

证　$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$

当 $x<x_0$ 时，分母为负，所以 $f'(x)>0$；

当 $x>x_0$ 时，分母为正，所以 $f'(x)<0$；

综上 $f(x_0)$ 为极大值.

由此得出以下定理.

定理 3.10（第二充分条件）　设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，那么:

（1）当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

（2）当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

【例 8】a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在点 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值？是极大值还是极小值？

解　$f'(x)=a\cos x+\cos 3x$

因为 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$=0，即 $a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=\dfrac{1}{2}a-1=0$，所以 $a=2$.

$$f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x,\quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}<0$$

所以极大值 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

3.3.3　函数的最值

在生产和科学实践中，经常遇到求最值的问题，在第 1 章讲的连续函数，在闭区间上一定能取到最大值与最小值.

现在来研究如何在闭区间上求函数的最值.

（1）求出 (a,b) 内的可疑点 x_i，$i=1,\cdots,n$；

（2）计算 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 及 $f(a)$与$f(b)$；

（3）$\max\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$ 就是 $[a,b]$ 上的最大值；

$\min\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$ 就是 $[a,b]$ 上的最小值.

【例 9】求函数 $f(x)=x^3-3x+1$ 在 $[-2,2]$ 上的最值.

解　$f'(x)=3x^2-3$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1$、$x_2=1$.

因为 $f(-2)=-1$、$f(-1)=3$、$f(2)=3$、$f(1)=-1$，所以最大值 $f(-1)=f(2)=3$，最小

值 $f(-2)=f(1)=-1$.

【例 10】 求 $f(x)=x^4-8x^2+2$ 在$[-1,3]$上的最大值和最小值.

解　由 $f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=4x(x-2)(x+2)=0$，得驻点 $x_1=0$、$x_2=2$、$x_3=-2$（$x_3\notin[-1,3]$舍去).

计算出 $f(-1)=-5$、$f(0)=2$、$f(2)=-14$、$f(3)=11$.

故函数$f(x)$在$[-1,3]$上，最大值 $f(3)=11$，最小值 $f(2)=-14$.

3.3.4　应用

1．最值应用

一些实际应用问题就是求某函数（通常称为目标函数）的最大值或最小值问题.

特别需要指出的是：

（1）若 $f(x)$ 在一个区间 I 上，连续可导且只有唯一一个极值点 x_0，那么 x_0 也是最值点.

（2）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)>0$，则 $f(b)$ 是最大值，$f(a)$ 是最小值.

（3）若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)<0$，则 $f(a)$ 是最大值，$f(b)$ 是最小值.

【例 11】 有一边长是 36cm 的正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的正方形，然后将四边折起做成一个方形无盖容器，问截去的小正方形的边长多大时，容器的容积最大？最大容积是多大？

解　设截下的小正方形的边长为 x，则容器的底边长为 $36-2x$，高为 x，于是容器的容积为 $V(x)=(36-2x)^2x$，x 的变化范围为 $0<x<18$.

$$V'(x)=(36-2x)^2-4x(36-2x)=(36-2x)(36-6x)$$

令 $V'(x)=0$，得驻点 $x_1=18$、$x_2=6$（$x_1=18$ 舍去).

当 $0<x<6$ 时，$V'(x)>0$；当 $6<x<18$ 时，$V'(x)<0$.

在 $(0,18)$ 内只有唯一一个极值点，故这个极值点就是要求的最小值点，所以 $V(6)$ 是极大值，也是最大值.

综上，剪去的小正方形边长为 6cm 时，容器的容积最大，最大容积 $V(6)=3456\text{cm}^3$.

【例 12】 要制造一个容积为 V_0 的带盖圆柱形桶，问桶的半径 r 和桶高 h 应如何确定，才能使所用材料最省？

解　首先建立目标函数．要想材料最省，就是要使圆桶表面积 S 最小.

由 $\pi r^2h=V_0$ 得 $h=\dfrac{V_0}{\pi r^2}$，故

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2V_0}{r}\quad(r>0)$$

令 $S'=4\pi r-\dfrac{2V_0}{r^2}=0$，得驻点 $r_0=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$.

又因在 $(0,+\infty)$ 内 S 只有唯一一个极值点，故这个极值点就是要求的最小值点，当 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}$，$h=2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{2\pi}}=2r$ 时，圆桶表面积最小，用料最省.

【例 13】从半径为 2 的圆形铁片上裁去一个扇形，并将剩下的部分做成一个漏斗，问做漏斗的扇形圆心角多大时，漏斗的容积最大？

解 设做漏斗的扇形圆心角为 x，则弧长为 $l=Rx$.

漏斗的底半径为 r，有 $2\pi r=Rx$，$r=\dfrac{Rx}{2\pi}$.

漏斗的高 $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{R^2-\dfrac{R^2x^2}{4\pi^2}}=\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

漏斗的容积 $V(x)=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{Rx}{2\pi}\right)^2\cdot\dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2-x^2}=\dfrac{R^3x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2-x^2}$.

$$V'(x)=\frac{R^3}{24\pi^2}\left[2x\sqrt{4\pi^2-x^2}-\frac{x^3}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}\right]$$

令 $V'(x)=0$，得唯一驻点 $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi$. 又由问题可知一定有最大值，所以当 $x=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\pi\approx 293.9^\circ$ 时，漏斗容积最大.

2．证明不等式

1）用函数的单调性证明不等式

例如，当 $x>x_0$ 时，证明 $f(x)>0$.

基本思想：若 $f(x_0)=0$ 且 $x>x_0$ 时，$f(x)$ 是增函数，则一定有 $f(x)>f(x_0)=0$，而要验证 $f(x)$ 是增函数，只需证明 $f'(x)>0$ 即可.

【例 14】证明当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

证 设 $f(x)=e^x-ex$，$f(1)=e-e=0$.

当 $x>1$ 时，$f'(x)=e^x-e>0$，所以 $f(x)$ 为增函数，即 $f(x)>f(1)=0$.

故当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

【例 15】证明：当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

证 令 $f(x)=1+\dfrac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，则 $f(0)=0$，且 $f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}>0$.

因此，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加，当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

【例 16】$0<x<1$，证明 $x>1+\ln x$.

证 设 $f(x)=x-\ln x-1$，因为 $0<x<1$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}<0$，所以 $f(x)$ 单调递减.

因为 $f(1)=0$，所以 $0<x<1$ 时，$f(x)>f(1)=0$，即 $x>1+\ln x$.

2）用最小值证明不等式

基本思想：只需证 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值为 0 即可.

【例 17】证明 $e^x\geqslant 1+x$.

证 设 $f(x)=e^x-x-1$，$f'(x)=e^x-1$. 令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$. 因为 $f''(x)=e^x$，$f''(0)=1>0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值. 因为是唯一的一个极值，所以也是最小值，

即 $f(0)=0$．故 $f(x)\geqslant f(0)=0$，即 $e^x\geqslant 1+x$．

加 油 站

【例 18】设函数 $f(x)$ 对所有的 x 都满足方程式 $f''(x)-\sqrt[3]{1+x}f'(x)-f^2(x)=0$．

若 x_0 是 $f(x)$ 的一个驻点，且 $f(x_0)\neq 0$，问 $f(x)$ 在 x_0 处是否取得极值？如果取得极值，是极大值，还是极小值？

解　因为 x_0 是 $f(x)$ 的驻点，所以 $f'(x_0)=0$，从而在 x_0 处，方程为 $f''(x_0)-f^2(x_0)=0$，于是 $f''(x_0)=f^2(x_0)>0$，所以 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$．

【例 19】求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的单调区间及极值．

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f'(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x-4}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}$$

令 $f'(x)=0\Rightarrow x=1$，$f'(x)$ 在 $x=-1$ 处不存在．

函数单调区间、极值见表 3.5．

表 3.5

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

极大值 $f(-1)=0$，极小值 $f(1)=-3\sqrt[3]{4}$．

【例 20】函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2y^2+y=1$（$y>0$）确定的函数，求 $y=y(x)$ 的极值．

解　方程两边对 x 求导，$2xy^2+2x^2yy'+y'=0$，$y'=\dfrac{-2xy^2}{2x^2y+1}$．

令 $y'=0$，得 $x=0$．

将 $x=0$ 代入原方程，得 $y=1$．

又由于在 $x=0$ 附近，当 $x<0$ 时，$y'>0$；当 $x>0$ 时，$y'<0$．所以，$x=0$ 是函数 $y=y(x)$ 的极大值点，极大值 $y(0)=1$．

【例 21】设函数 $f(x)=nx(1-x)^n$（n 为自然数）．试求：

（1）$f(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值 $M(n)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$．

解　（1）$f'(x)=n(1-x)^n-n^2x(1-x)^{n-1}=n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=1$、$x_2=\dfrac{1}{n+1}$．

当 $0<x<\dfrac{1}{n+1}$ 时，$f'(x)>0$；当 $\dfrac{1}{n+1}<x<1$ 时，$f'(x)<0$．

因此 $x=\dfrac{1}{n+1}$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的唯一极大值点，它也是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值点.

函数的最大值 $M(n)=f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{n}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n=\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【例 22】设 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x_1=1$ 和 $x_2=2$ 处有极值，试求 a、b 的值，并指出 x_1、x_2 是极大值点还是极小值点.

解　$\forall x>0$，有 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$. 因为 $x_1=1$、$x_2=2$ 都是极值点，所以 $f'(1)=f'(2)=0$. 即

$$\begin{cases}a+2b+1=0\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3}\\ b=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$$

因为 $f''(1)=\dfrac{1}{3}>0$，所以极小值 $f(1)=\dfrac{5}{6}$.

因为 $f''(2)=-\dfrac{1}{6}<0$，所以极大值 $f(2)=-\dfrac{2}{3}\ln 2-\dfrac{2}{3}+2=\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\ln 2$.

【例 23】证明函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 内是单调递减函数.

证　欲证 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}<0$，即要证 $x\in(0,\pi)$ 时，$x\cos x-\sin x<0$.

设 $f(x)=x\cos x-\sin x$，$f(0)=0$.

因为当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内是递减函数.

当 $x\in(0,\pi)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $x\cos x-\sin x<0$，所以 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x}<0$.

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内是单调递减函数.

【例 24】有一块等腰直角三角形的钢板（见图 3.5），斜边长为 a，欲从这块钢板上割下一矩形钢板，使其面积最大，要求以斜边为矩形的一边条，问如何截取？

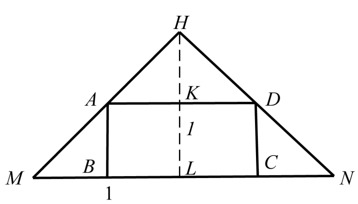


图 3.5

解　设 $BC=x$，则 $CN=\dfrac{1}{2}(a-x)=CD$，则矩形 $ABCD$ 的面积 $S(x)=\dfrac{1}{2}(a-x)x$.

$S'(x)=\dfrac{1}{2}a-x$，令 $S'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{2}a$，唯一驻点.

又 $S''\left(\dfrac{1}{2}a\right)=-1$，所以 $S\left(\dfrac{1}{2}a\right)=\dfrac{a^2}{8}$ 是最大值.

$$BC=\frac{1}{2}a\text{，}\quad CD=\frac{1}{4}a$$

请考虑一下，矩形的边在直角上，该如何截取，两者最大值是否相等？

【例 25】 一顶角为 $\frac{\pi}{2}$ 的圆锥形容器内盛有 V_0 升水，现往里灌水，从时刻 t=0 到时刻 t 时灌入的水量为 at^2（a>0）升，问何时水深 h 上升的速率最快?

解　设经过时间 t，水深为 h，水面半径为 r，此时容器中水的体积为

$$V_0+at^2=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

而 r=h，解得

$$h=\left[\frac{3}{\pi}\left(V_0+at^2\right)\right]^{\frac{1}{3}}\text{，}\ t>0$$

所以，目标函数为

$$V(t)=h'(t)=\frac{2at}{\sqrt[3]{9\pi}}\left(V_0+at^2\right)^{-\frac{2}{3}}\text{，}\ t>0$$

而

$$V'(t)=\frac{2a}{\sqrt[3]{9\pi}}\left(V_0+at^2\right)^{-\frac{5}{3}}\left(V_0-\frac{1}{3}at^2\right)$$

所以有唯一驻点 $t=\sqrt{\frac{3V_0}{a}}$.

由题意，目标函数的最大值存在且驻点唯一，因此，当 $t=\sqrt{\frac{3V_0}{a}}$ 时，水深 h 上升的速率最快.

习　题　3.3

一、填空题

1．$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3}$ 的极值为_________.

2．$y=x^2-2x+3$ 的极值为____________.

3．$f(x)=x(x-2)^2$ 的极小值为_________.

4．$f(x)=1-\ln(1+x)$ 的单调递增区间为________.

5．$f(x)=x+\sqrt{1-x}$ 在 $[-3,1]$ 上的最值为________________.

6．$f(x)=x-x^2$ 在 $[1,2]$ 上的最小值为______________.

二、单项选择题

1．命题（　　）是正确的.

A．函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，且在 (a,b) 内可导，则必有 $f'(x)>0$

B．函数在 (a,b) 内的极大值必大于极小值

C．函数的极值点未必是驻点

D．$f(x)$在其定义域内处处可导，且$f'(x)<0$，则$f(x)$在其定义域内一定是减函数

2．当$x<x_0$时，$f'(x)>0$；当$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则x_0必定为函数$f(x)$的（　　）.

A．驻点　　B．极大值点　　C．极小值点　　D．以上都不对

3．函数$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$的极小值点为（　　）.

A．-1　　B．0　　C．1　　D．不存在

4．函数$f(x)=x^4-2x^2+3$在$[0,2]$上的最大值点是（　　）.

A．3　　B．0　　C．2　　D．4

5．设在$[0,1]$上，$f''(x)>0$，则$f'(0)$、$f'(1)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$这几个数的大小顺序为（　　）.

A．$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　B．$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

C．$f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　D．$f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

6．函数$y=f(x)$在点$x=x_0$处取得极大值，则必有（　　）.

A．$f'(x_0)=0$　　B．$f''(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)<0$　　D．$f'(x_0)=0$或导数不存在

三、计算题

1．求下列函数的单调区间及极值.

（1）$f(x)=x^4-2x^2+1$；　　（2）$y=2x+\dfrac{8}{x}$　$(x>0)$；

（3）$f(x)=x^2-2\ln x$.

2．求下列函数在所给区间上的最值.

（1）$f(x)=x+2\sqrt{x}$，$x\in[0,4]$；

（2）$f(x)=\sqrt{100-x^2}$，$x\in[-6,8]$；

（3）$f(x)=x+\sqrt{1-x}$，$x\in[-5,1]$.

3．要做一个底面为长方形的带盖的箱子，其容积为$72\mathrm{cm}^3$，其底面边长成 1∶2 的关系，问各边长多少时，才能使表面积最小？

4．一个无盖的圆形大桶，已知体积为V_0，要使其表面积最小，问圆柱的底面半径及高应是多少？

5．设有半径为R的球，内接一个圆柱体，问圆柱体的高为多少时，圆柱体的体积最大？

6．有甲、乙两城，甲城位于一直线的河岸边，乙城离岸 40km，乙城到岸的垂点与甲城相距 50km，两城在此河上合设一水厂取水，从水厂到甲城和乙城的水管费用分别为每公里 400 元和 600 元．问此水厂应设在河边何处，才能使水管费用最省？

7．把一根直径为 10 的圆木锯成截面为矩形的梁，已知方梁的抗压强度$W=kbh^2$，其中b是方梁的宽，h是方梁的高，k是比例常数，问b及h为多少时，方梁的抗压强度最大？

8．证明下列不等式.

（1）当$x>0$时，$x>\ln(1+x)$.

（2）当$x>0$时，$x>\sin x$.

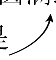
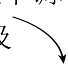
（3）当$x>1$时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

（4）当 $x>0$ 时，$1+x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)>\sqrt{1+x^2}$．

（5）设 $x>0$，证明：$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$．

3.4　曲线的凸凹性、拐点及函数作图

3.4.1　曲线的凸凹性

上节用一阶导数圆满地解决了函数的增减及极值问题，但在函数单调增加时，有两种情况：一种是，另一种是；同样，单调减少时，也有两种情况及.

下面给出曲线凸凹性定义.

定义 3.2　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是（向下）凹的，如.

定义 3.3　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对区间 I 上任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是（向上）凸的，如.

如何判断一个函数 $y=f(x)$ 的凸凹性呢？

定理 3.11　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续并具有二阶导数，且在区间 I 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凹的.

定理 3.12　设 $f(x)$ 在区间 I 上连续并具有二阶导数，且在区间 I 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在区间 I 上的图形是凸的.

【例 1】判定曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 的凸凹性.

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $y'=-2\mathrm{e}^{-2x}$，$y''=4\mathrm{e}^{-2x}>0$，所以曲线 $y=\mathrm{e}^{-2x}$ 是凹的.

【例 2】判断曲线 $y=\ln x$ 的凸凹性.

解　因 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，$y=\ln x$ 的二阶导数在区间 $(0,+\infty)$ 内处处为负，故曲线 $y=\ln x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是凸的.

函数在其定义域内都是凸或都是凹的，毕竟是少数，多数函数在其定义域内有凸有凹，因此我们对凸凹的分界点十分感兴趣，如图 3.6 所示.

定义 3.4　连续曲线 $y=f(x)$ 上的凸凹分界点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 称为曲线的拐点.

观察图 3.6，发现当 $x<x_0$ 时，曲线是凹的，即 $f''(x)>0$；当 $x_1>x>x_0$ 时，曲线是凸的，$f''(x)<0$.

二阶导数由正变负（或负变正）一般要经过 $f''(x)=0$．因此找拐点，首先要找 $f''(x)=0$ 的点.

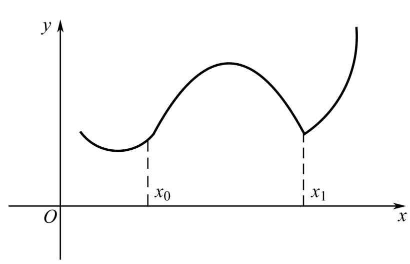


图 3.6

其次在点 x_1 处是尖点，即 $f'(x)$ 不存在点，因此找拐点还要找 $f'(x)$ 不存在点，或者二阶导不存在点.

定理 3.13　$y=f(x)$ 在 x_0 的一个邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内二阶可导，如果 $f''(x)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在，或 $f''(x_0)$ 不存在，而 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 内的二阶导数变号时，则点 $(x_0,f(x_0))$ 就是 $y=f(x)$ 的拐点；当两侧二阶导不变号时，点 $(x_0,f(x_0))$ 不是拐点.

定理 3.14　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处三阶可导，且 $f''(x_0)=0$ 而 $f'''(x_0)\neq 0$，那么点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线的拐点.

求曲线 $y=f(x)$ 的拐点的横坐标的步骤如下：

（1）求定义域;

（2）求 $f'(x)$ 不存在点；

（3）求 $f''(x)=0$ 的点；

（4）求 $f''(x)$ 不存在点.

将（2）、（3）、（4）这三种点统称为可疑点．对可疑点 x_i，看其两侧二阶导的符号，当两侧二阶导符号相反时，点 $(x_i,f(x_i))$ 就是拐点；当两侧符号相同时，点 $(x_i,f(x_i))$ 就不是拐点.

【例 3】求曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+14$ 的拐点.

解　$y'=6x^2+6x-12$，$y''=12x+6=12\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

解方程 $y''=0$，得 $x=-\dfrac{1}{2}$．当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''<0$；当 $x>-\dfrac{1}{2}$ 时，$y''>0$．因为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{41}{2}$，所以点 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{41}{2}\right)$ 是曲线的拐点.

【例 4】求曲线 $y=\ln(1+x^2)$ 的凸凹区间及拐点.

解　$x\in\mathbf{R}$，$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$，$y''=\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

令 $y''=0$，得 $x_1=-1,x_2=1$.

凸凹区间及拐点见表 3.6.

表 3.6

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\frown$ 凸	拐点	$\smile$ 凹	拐点	$\frown$ 凸

拐点为 $(-1,\ln 2)$ 与 $(1,\ln 2)$.

【例 5】已知点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点，求 a、b 的值.

解　点 $(1,3)$ 是曲线的拐点，应该满足以下条件:

① 点 $(1,3)$ 在曲线上，即 $3=a+b$.

② $y''(1)=0$.

因为 $y'=3ax^2+2bx$， $y''=6ax+2b$，所以 $6a+2b=0$.

③ 在 $x=1$ 两侧二阶导符号相反.

联立解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{3}{2} \\ b=\dfrac{9}{2} \end{cases}$.

【例 6】求 $y=\sqrt[3]{x}$ 的凸凹区间及拐点.

解　$x\in\mathbf{R}$， $y'=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$， $y''=-\dfrac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$.

当 $x=0$ 时， y' 不存在.

凸凹区间及拐点见表 3.7.

表 3.7

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	凹	拐点	凸

拐点为 $(0,0)$.

由函数凸凹的定义可知，有些不等式可以用函数的凸凹性来证明.

【例 7】利用函数的凸凹性，证明下列不等式：

（1）$\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$　（$x\neq y$）；

（2）$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$　（$x>0,y>0,x\neq y$）.

证　（1）令 $f(u)=e^u$，则 $f''(u)=e^u>0$，所以 $f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是凹的.

故对任意两个不同点 x、y，有 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)<\dfrac{f(x)+f(y)}{2}$，即 $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$.

（2）令 $f(u)=u\ln u$，则 $f''(u)=\dfrac{1}{u}>0$（$u>0$），所以 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的，故对任意两个不同点 x 与 y，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

即 $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}$.

3.4.2　曲线的渐近线

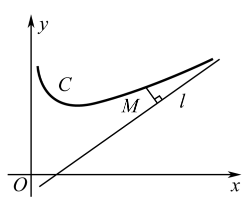


图 3.7

曲线 C 上的动点 M 沿曲线离坐标原点无限远移时，若能与一直线 l 的距离趋向于零，则称直线 l 为曲线 C 的一条渐近（直）线，如图 3.7 所示.

渐近线反映了曲线无限延伸时的走向和趋势．确定曲线 $y=f(x)$ 的渐近线的方法如下.

定义 3.5　曲线 $y=f(x)$ 的定义域为 $(a,+\infty)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$，则称 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线.

当 $k=0$ 时，称 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的水平渐近线.

定义 3.6　曲线 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,a)$，若 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx-b\right]=0$，则称 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的斜渐近线.

当 $k=0$ 时，称 $y=b$ 是 $y=f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的水平渐近线.

定义 3.7　$y=f(x)$，当 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ [或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$]时，称 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

注：① 斜渐近线最多有 2 条，最少 0 条.

② 水平渐近线最多有 2 条，最少 0 条. 在同一方向上，水平渐近线不能与斜渐近线共存.

③ 垂直渐近线最多有无数条，如 $y=\tan x$，$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 都是垂直渐近线，($k\in\mathbf{Z}$) 最少也是 0 条.

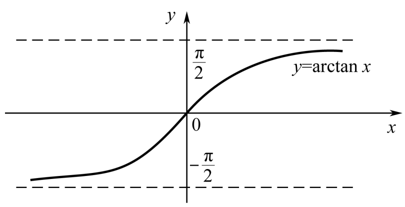


图 3.8

【例 8】求曲线 y=arctan$x$ 的水平渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以曲线 y=arctan$x$ 有水平渐近线 $y=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $y=-\dfrac{\pi}{2}$（见图 3.8）.

【例 9】求 $y=\dfrac{1}{x}$ 的垂直渐近线.

解　因为 $x\neq0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$，所以 $x=0$ 是 $y=\dfrac{1}{x}$ 的垂直渐近线.

【例 10】求曲线 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 的渐近线.

解　$x=-1$ 为垂直渐近线，无水平渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x}=1$，所以 $a=1$；又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}[y-ax]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+x}-x\right)=-1$，所以 $b=-1$，故曲线有斜渐近线 $y=x-1$.

【例 11】求 $y=x\arctan x$ 的斜渐近线.

解　因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\arctan x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\arctan x-\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2+1}=-1$$

所以 $y=\dfrac{\pi}{2}x-1$ 是 $x\to+\infty$ 时的一条斜渐近线. 同理，$y=-\dfrac{\pi}{2}x-1$ 是 $x\to-\infty$ 时的另一条斜渐近线.

3.4.3　函数作图

作函数图形的步骤是：

① 求 $y=f(x)$ 定义域；

② 函数的奇偶性、周期性；

③ 函数的单调区间、极值；

④ 函数的凸凹区间、拐点；

⑤ 渐近线；

⑥ 一些特殊点[(极值点, 极值)，拐点，与坐标轴交点]（如果要作精确一些的图，可再多列一些点）.

【例 12】作函数 $y=xe^{-x}$ 的图形.

解　① $x\in\mathbf{R}$.

② 非奇非偶，非周期.

③ $y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$，令 $y'=0$，得 $x_1=1$.

④ $y''=e^{-x}(x-2)$，令 $y''=0$，得 $x_2=2$.

列表如表 3.8 所示.

表 3.8

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	0	−		−
y''	−		−	0	+
y	↗	极大值	↘	拐点	↘

（极大值点, 极小值）$=\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$，拐点为 $\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$.

⑤ 渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{-x}=0$，所以 $y=0$ 是 $x\to+\infty$ 时的一条水平渐近线；$x\to-\infty$ 时，无水平渐近线，也无斜渐近线．因为 $y=xe^{-x}$ 是连续函数，定义域为 $\mathbf{R}$，所以无垂直渐近线.

⑥ 与坐标轴交点 $(0,0)$.

在坐标系中画出特殊点，用光滑曲线按表 3.8 第四行的曲线将各点连好（见图 3.9）.

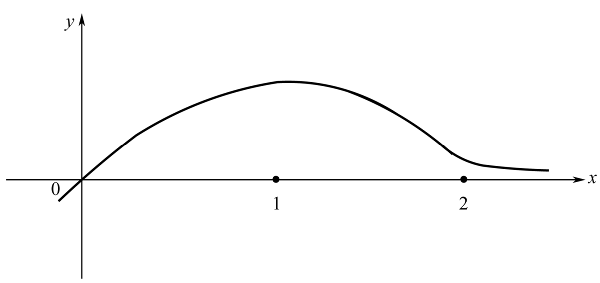


图 3.9

注意：不要越过水平渐近线 $y=0$.

【例13】作函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解　① $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，是偶函数，图形关于 y 轴对称.

② $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，$f''(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=0$；令 $f''(x)=0$，得 $x=-1$ 与 $x=1$.

③ 列表如表 3.9 所示.

表 3.9

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+		+	0	−		−
$f''(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	拐点	↗	极大值点	↘	拐点	↘

④ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=0$，得水平渐近线 $y=0$.

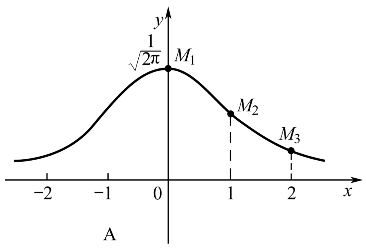


图 3.10

图形如图 3.10 所示.

⑤ 根据对称性，只考虑 $[0,+\infty)$ 的情况即可. 极大值对应的点为 $M_1\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$，拐点为 $M_2\left(1,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\right)$，再补充点 $M_3\left(2,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^2}\right)$. 画出右半平面部分的图形，即可作出函数的图形.

注：函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 是概率统计中标准正态分布的概率密度函数，应用非常广泛.

加 油 站

【例 14】求函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}$ 的凸凹区间及拐点.

解　$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $y'=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$，$y''=1-x^{-\frac{1}{3}}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 令 $y''=0$，得 $x=1$. 当 $x=0$ 时，y'' 不存在.

列表如表 3.10 所示.

表 3.10

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	不存在	−	0	+
y	∪	拐点	∩	拐点	∪

拐点为$(0,0)$和$\left(1,-\dfrac{2}{5}\right)$.

【例 15】确定a、b、c的值，使函数$y=x^3+ax^2+bx+c$有一个拐点$(1,-1)$，且在$x=0$处有极大值1.

解　点$x=0$是极大值点，且$y(0)=1$，$y'(0)=0$.

点$(1,-1)$是拐点，$y'=3x^2+2ax+b$，$y''=6x+2a$，$y''(1)=0$.

故有$\begin{cases}c=1\\b=0\\1+a+b+c=-1\\6+2a=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}a=-3\\b=0\\c=1\end{cases}$.

【例 16】设曲线$y=ax^3+bx^2+cx$在点$(1,3)$处有水平切线，且坐标原点是该曲线的拐点，求a、b、c的值.

解　点$(1,3)$在曲线上，有$a+b+c=3$．在点$(1,3)$处有水平切线，所以$y'(1)=0$.

$y'=3ax^2+2bx+c$，故有$3a+2b+c=0$.

$y''=6ax+2b$，由于$(0,0)$是曲线的拐点，所以$y''(0)=0$，故有$2b=0$.

$$\begin{cases}a+b+c=3\\3a+2b+c=0\\b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=0\\c=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

【例 17】求下列函数的渐近线.

（1）$y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$；　　（2）$y=\ln\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{x}\right)$；

（3）$y=x+\dfrac{1}{x}$.

解　（1）$x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}=\ln 1=0$，所以$y=0$是水平渐近线.

因为$\lim\limits_{x\to1^-}\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}=\infty$，所以$x=1$是垂直渐近线.

因为$\lim\limits_{x\to2^+}\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}=\infty$，所以$x=2$是垂直渐近线.

（2）$x\in(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{x}\right)=\ln\mathrm{e}=1$，所以$y=1$是水平渐近线.

因为$\lim\limits_{x\to0^-}\ln\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{\mathrm{e}}^+\right)}\ln\left(\mathrm{e}-\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，所以$x=0$、$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$是垂直渐近线.

（3）$x\neq0$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=0$，所以 $y=x$.

同理，$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+\dfrac{1}{x}}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}-x\right)=0$，所以 $y=x$ 是斜渐近线.

因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$，所以 $x=0$ 是垂直渐近线.

【例 18】 证明不等式 $\dfrac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$，（$x>0,y>0,x\neq y,n>1$）.

证　设 $f(u)=u^n\ (u>0)$，$n>1$.

$$f'(u)=nu^{n-1}，\quad f''(u)=n(n-1)u^{n-2}>0$$

所以，$f(u)=u^n$ 是凹的，当 $x>0$，$y>0$，$x\neq y$ 时，有 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2}>f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$，即

$$\frac{1}{2}\left(x^n+y^n\right)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

习　题　3.4

一、填空题

1．$y=x^3-3x$ 的凹区间为________.

2．$y=3x^4-4x^3+1$ 的凸区间为_________.

3．曲线 $y=1-\sqrt[3]{x-2}$ 的拐点为___________.

4．$y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ 的渐近线有____________条.

5. 曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+2$ 在 $x=1$ 处有极小值 0，且点 $(0,2)$ 为其拐点，则 $a=$__________，$b=$___________，$c=$__________.

二、单项选择题

1．函数 $y=x^3+6x+1$ 在定义域内（　　）.

A．单调增加　　B．单调减少　　C．图形凹的　　D．图形凸的

2．$f''(x_0)=0$ 是 $f(x)$ 的图形在点 $x=x_0$ 处有拐点的（　　）条件.

A．必要非充分　　B．充分非必要　　C．充分必要　　D．以上都不是

3．$y=\ln(4-x)$ 在其定义域内是（　　）.

A．减函数凹的　　B．减函数凸的　　C．增函数凹的　　D．增函数凸的

4．曲线 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$（　　）.

A．有垂直渐近线　　B．有水平渐近线　　C．有斜渐近线　　D．没有渐近线

5．点 $(0,1)$ 是曲线 $y=ax^3+bx^2+c$ 的拐点，则（　　）正确.

A．$a=1$、$b=-3$、$c=1$　　B．$a=1$、$b=0$、c任意

C．a为非零的任意常数，$b=0$、$c=1$　　D．$a=-1$、$b=2$、$c=1$

三、计算题

1．求下列各函数的凸凹区间及拐点．

（1）$y=\dfrac{1}{x}\ln x$；　（2）$y=\dfrac{1}{x^2+1}$；　（3）$y=e^{-x^2}$．

2．求下列各曲线的渐近线．

（1）$y=\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$；　（2）$y=e^{\frac{1}{x}}-1$；　（3）$y=\ln x$．

3．作下列函数的图形．

（1）$y=e^{-(x-1)^2}$；　（2）$y=\dfrac{x}{1+x^2}$．

3.5　曲　　率

前面已经研究了曲线的增减及凹凸等性质，现在要研究曲线的弯曲程度，如何刻画曲线的弯曲程度呢？下面先阐述一下曲率的概念．

3.5.1　曲率的概念

直线是不弯曲的，其弯曲度为0，而抛物线$y=x^2$在顶点邻近处的弯曲度要比远离顶点的部分弯曲度更大些．

1．弧段

弧段$\overset{\frown}{p_0p_1}$，如图 3.11 所示．

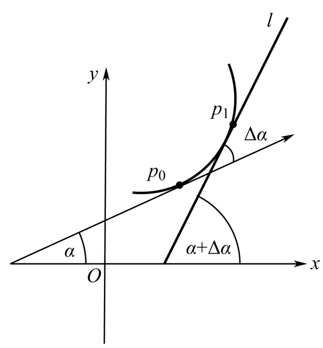


图 3.11

在p_0处作切线，切线与x轴正向夹角为α；在p_1处作切线，切线与x轴正向夹角为$\alpha+\Delta\alpha$，弧$\overset{\frown}{p_0p_1}$的长度为$|\Delta s|$．

用$\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$表示弧段$\overset{\frown}{p_0p_1}$的弯曲程度，叫作弧段$\overset{\frown}{p_0p_1}$的平均曲率，记作$\overline{K}$，即$\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$．

2．曲线上一点 p_0 处的曲率

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法，下面来定义曲线上一点p_0处的曲率．

定义 3.8　光滑曲线s上的一段弧$\overset{\frown}{p_0p_1}$，其长度为$|\Delta s|$，p_0处的切线与p_1处的切线的夹角为$\Delta\alpha$，如果$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$存在，那么这个极限值称为曲线$s$在$p_0$处的曲率，记作$\overline{K}$，即

$$\overline{K}=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.$$

为了计算曲线的曲率，下面先来介绍弧长的微分．

3．弧微分

设曲线$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$，$\varphi(t)$与$\psi(t)$都有连续的导数$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$，且$\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 \neq 0$.

假定以参数t增大的方向作为曲线及其切线的正向，当参数t由α变到β时，弧段上的对应点由A移到B.

设在$[\alpha,\beta]$上任取一点t，弧段$\overset{\frown}{AB}$上有一点p_0与之对应．若以A为起点来计量弧段的长度，则弧段$\overset{\frown}{Ap_0}$的长度就有一个确定的值s，因而s是t的增函数．给t一个增量Δt，那么对应于$t+\Delta t$曲线上有一点p_1，从而s有一增量Δs.

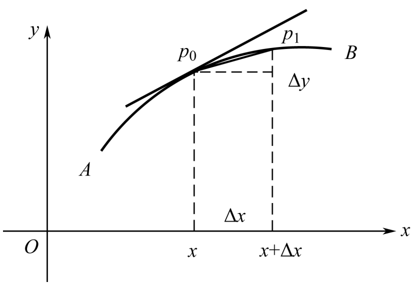


图 3.12

由图 3.12 知，$\overline{p_0p_1}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$，从而有

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \cdot \left(\frac{\overline{p_0p_1}}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 \tag{3.4}$$

令$\Delta t \to 0$，在$\varphi'(t)$与$\psi'(t)$连续的条件下，可以证明：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{p_0p_1}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{p_0p_1}}{\overset{\frown}{p_0p_1}} = 1$$

由式（3.4）可知

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2$$

由于s是t的增函数，所以$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}$．即

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

这就是弧微分公式．如果曲线是由直角坐标方程$\begin{cases} y=f(x) \\ x=x \end{cases}$表示的，则

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x \tag{3.6}$$

如果曲线是由极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$表示的，则

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\rho(\theta)\right]^2 + \left[\rho'(\theta)\right]^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{3.7}$$

3.5.2　曲率公式

由$K = \lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\right|$，$\tan\alpha = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$，$\alpha = \arctan\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2}\cdot\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2}=\frac{\varphi'(t)\psi''(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2}$$

得

$$K=\frac{\left|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)\right|}{\left\{\left[\varphi'(t)\right]^2+\left[\psi'(t)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}\tag{3.8}$$

如果曲线方程为 $y=f(x)$，则

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\tag{3.9}$$

【例 1】求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ 的曲率（$0<t<2\pi$）.

解　$x_t'=a(1-\cos t)$，$x''=a\sin t$；$y_t'=a\sin t$，$y''=a\cos t$

由式（3.8）有

$$K=\frac{|a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t\cdot a\sin t|}{\left[a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|\cos t-1|}{2^{\frac{3}{2}}a(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|2\sin^2\frac{t}{2}\right|}{2^3a\left|\sin^3\frac{t}{2}\right|}=\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}$$

【例 2】求抛物线 $y=ax^2$ 的曲率.

解　由式（3.9）有 $K=\dfrac{2|a|}{\left(1+4a^2x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. 当 $x=0$ 时，$K=2|a|$，即在原点（顶点）的曲率最大.

定义 3.8　称 $\dfrac{1}{K}$ 为曲线上 p_0 处的曲率半径，记作 R，如果 K 为曲线曲率，则 $R=\dfrac{1}{K}$.

【例 3】已知工件内表面的截线是抛物线 $y=0.4x^2$，如果要用砂轮打磨它的内表面，那么应选用直径多大的砂轮才比较适合？

解　显然，对于选用的砂轮，其半径应小于工件上各点处的曲率半径的最小值，否则就会磨掉工件上不应磨去的部分，所以应先求曲率半径的最小值，即曲率最大处. 显然在 $x=0$ 处曲率最大，所以 $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{2\times|0.4|}=\dfrac{1}{0.8}=1.25$.

加 油 站

【例 4】求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪点曲率最大？

解　由式（3.9）有

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2|a|}{\left[1+(2ax+b)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

显然，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$K=2|a|$ 最大，即在抛物线的顶点处，曲率最大.

【例 5】计算双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率.

解　由 $y=\dfrac{1}{x}$，得 $y'=-\dfrac{1}{x^2}$，$y''=\dfrac{2}{x^3}$，$y'(1)=-1$，$y''(1)=2$.

由式（3.9），得到在点 $(1,1)$ 处的曲率为

$$K=\frac{2}{\left[1+(-1)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

【例 6】求椭圆 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率.

解　$\dfrac{\mathrm{d}\left(4x^2+y^2\right)}{\mathrm{d}x}=8x+2y\cdot y'=0$，$y'=-\dfrac{4x}{y}$，$y''=-\dfrac{4y-4xy'}{y^2}=-\dfrac{4y+\dfrac{16x^2}{y}}{y^2}$

因为 $y'\big|_{(0,2)}=0$，$y''\big|_{(0,2)}=-2$，所以该椭圆在点 $(0,2)$ 处的曲率 $K=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(0,2)}=2$.

【例 7】在 $y=\sin x$（$0<x<\pi$）上哪一点处的曲率最大？并求出该点处的曲率半径.

解　因为 $y'=\cos x$，$y''=-\sin x$，所以

$$K=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sin x}{\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}}}\qquad x\in(0,\pi)$$

当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，分母最小为 1，而分子最大为 1，所以在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},1\right)$ 处，曲率 $K=1$ 最大，此时有最小的曲率半径 $R=\dfrac{1}{K}=1$.

习　题　3.5

一、计算题

1．火车在圆弧形铁路线上行驶，每前进 1000m，方向改变 4°，求圆弧的半径.

2．求下列曲线在指定点处的曲率及曲率半径.

（1）$y=x^2$，$x=1$；（2）$y=\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$；（3）$y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$x=0$.

本 章 小 结

本章以导数为主要工具，对函数进行了全方位的研究，其理论基础就是中值定理.

柯西中值定理是拉格朗日中值定理的推广，而拉格朗日中值定理又是罗尔定理的推论，这三个定理都是把函数在区间端点处的函数值与区间中的某一点 ξ 处的导数值联系在一起，所以它们统称为微分学中值定理，它们属于数学中存在性的定理，虽然没有指出 ξ 的具体位置，但它们仍然十分重要.

1．函数单调极值与凸凹判定

函数的单调性、极值、最值是由一阶导数完成的.

函数的凸凹性及拐点是由二阶导数完成的.

下面介绍一个记忆曲线凸凹及极值的一个方法，有人戏称为“水杯法则”:

（1）水杯$\cup$这样放置，里面能装水，有水称 $f''(x)>0$.

（2）水杯$\cap$这样放置，里面不能装水，没水称 $f''(x)<0$.

故 $f''(x)>0$，有水，曲线凹（或有极小值).

$f''(x)<0$，没水，曲线凸（或有极大值).

2．不定极限求法

由柯西中值定理又引出了解决不定型极限的重要法则，即洛必达法则，它直接解决的是$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型，而其他 5 种，即$\infty-\infty$、$0\cdot\infty$、1^∞、0^0、∞^0型都可以转化成上述两种.

在使用洛必达法则时，应注意下列几点:

（1）每次使用法则时，必须检验是不是$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，如果不是，则一定不能使用.

（2）使用法则时，不是对整个商求导，而是分子、分母分别求导.

（3）求极限时，要及时将确定型因子分离出来，以简化运算.

（4）用等价无穷小来代替复杂的无穷小的因子（乘积时才可以代替，和差时一定不能用等价无穷小来代替).

（5）根据具体情况，考虑是否需要做适当的变量替换，以简化运算.

【例 1】求$\lim\limits_{x\to0}\frac{2^{\sin x}-2^x}{x^3}$.

解　这是$\frac{0}{0}$型，直接用洛必达法则很烦琐．可以转换一下，即

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{2^{\sin x}-2^x}{x^3}&=\lim_{x\to0}2^{\sin x}\frac{1-2^{x-\sin x}}{x^3}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{2^{x-\sin x}-1}{x^3}=-\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\ln2\\&=-\ln2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{6}\ln2\end{aligned}$$

这里用了$x\to0$，$a^x-1\sim x\ln a$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$这两个替换.

【例 2】求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right)&=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+1}{x-1}-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^3}}\end{aligned}$$

这时化成$\dfrac{0}{0}$型，若此时对分子、分母求导很烦琐．如果用$\dfrac{1}{x}=t$来代换，则可以简单些，这正是数学的力量！

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x^3}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}-2}{3t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{2t^2}{3t^2\left(1-t^2\right)}=\frac{2}{3}$$

3．不等式的一些证法

下面再归纳一些证明不等式的方法：

（1）利用微分中值定理；

（2）利用函数的单调性；

（3）利用函数的最值；

（4）利用函数的凸凹性．

【例 3】讨论π^e与e^π的大小．

解　这是研究x^y与y^x大小的一个特例．

不妨设x与y都大于1，上述大小问题等价于$y\ln x$与$x\ln y$的大小问题，即等价于$\dfrac{\ln x}{x}$与$\dfrac{\ln y}{y}$的大小问题．而研究它们的大小问题，就是研究函数$\dfrac{\ln x}{x}$的增减问题，即$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$是大于0，还是小于0.

显然当$x>e$时，$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'<0$，所以$\dfrac{\ln x}{x}\searrow$；

当$x<e$时，$\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'>0$，所以$\dfrac{\ln x}{x}\nearrow$.

因为$\pi>e$，所以$\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，$\pi\ln e>e\ln\pi$，即$e^\pi>\pi^e$.

4．应用中求最值问题

在解决最值的实际问题中，难点在于建立目标函数，它需要一定的几何与物理知识，为此要多做一些不同类型的应用题来提高自己解决实际问题的能力．

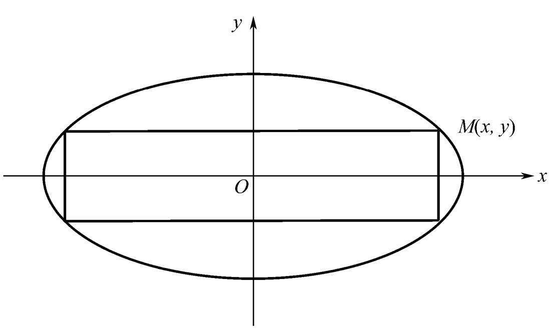


图 3.13

【例 4】在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$内做一内接矩形，使其面积最大．

解　如图 3.13 所示，设内接矩形在第一象限的顶点为$M\left(x,y\right)$，其面积为$S=4xy$.

而 $y=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$，所以

$$S=\frac{4b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S'=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)$$

令 $S'=0$，得

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a \quad （负的舍去）$$

又因为 $S'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)<0$，所以当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}b$ 时，面积最大，最大面积为 $S=2ab$.

5．函数图形

函数的图形是函数性态的几何直观表示，它十分清晰地勾勒出函数的各种性质，作一个函数图形相当于做一个本章综合题，各节的知识都用上了.

下面几个图形对于证明方程只有一个实根，或有两个实根及三个实根是有启发的（见图 3.14）.

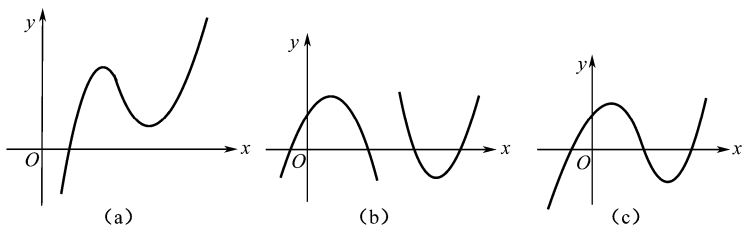


图3.14

复 习 题 3

一、填空题

1．$y=y(x)$ 满足方程 $y''-2y'-4y=0$，若 $y'(x_0)=0$，$y(x_0)=2$，则 $y(x_0)$ 是_______.

2．$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x}=$________.

3．如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+ce^x)}{\sqrt{1+cx^2}}=4$，则 $c=$________.

4．$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-1}{4x^2}=$_________.

5．$\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)=$________.

二、单项选择题

1．设 $f(x)$ 是偶函数，二阶可导，且 $f''(0)>0$，则 x=0（　　）.

A．不是 $f(x)$ 的驻点　　　　B．是 $f(x)$ 的不可导点

C．是 $f(x)$ 的极小值点　　D．是 $f(x)$ 的极大值点

2．设函数 $f(x)$ 有连续的导数，并且 $f(0)=f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\tan x)-1}{\ln f(x)}$ 为（　　）．

A．0　　B．1　　C．2　　D．$\dfrac{5}{2}$

3．曲线 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ 的渐近线的条数为（　　）．

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4．$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f(x_0)=g(x_0)=0$，$f'(x_0)g'(x_0)>0$，则正确的结论是（　　）．

A．x_0 不是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点

B．x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，但不是极值点

C．x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，且是 $f(x)\cdot g(x)$ 的极小值点

D．x_0 是 $f(x)\cdot g(x)$ 的驻点，且是 $f(x)\cdot g(x)$ 的极大值点

5．设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导等价于（　　）．

A．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　B．$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在

C．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　D．$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在

6．$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0$，则必存在一个正数 δ，使得（　　）成立．

A．曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是凹的

B．曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 是凸的

C．曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上单减，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上单增

D．曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上单增，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上单减

7．设 $f'(x)=(x-2)(3x+1)$，$x\in\mathbf{R}$，则在 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{6}\right)$ 内，$f(x)$ 是（　　）．

A．单增，图形凹　　B．单减，图形凹

C．单增，图形凸　　D．单减，图形凸

三、计算题

1．已知三次曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在点 $x=-1$ 处取得极大值，点（0,3）是其拐点，求 a、b、c 的值．

2．设点 $(1,3)$ 是曲线 $y=x^3+ax^2+bx+14$ 的拐点，求 a、b 的值，并求出单调区间和极值．

3．求 $y\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的单调区间和极值．

4．求 $y=\arctan x-\ln(1+x^2)$ 的单调区间和极值．

5．证明当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$．

6．求 $y = x^2 \ln x$ 的凸凹区间及拐点．

7．求 $y\frac{1}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$ 的渐近线．

8．作函数 $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的图形．

9．求 $x^2 + xy + y^2 = 5$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率．

10．讨论方程 $\ln x = \frac{x}{\mathrm{e}} - 1$ 有几个实根．

第 4 章　不定积分

在第 2 章中讨论了如何求一个函数的导数（或微分）问题，但在科学、技术和经济的许多问题中，常常会遇到相反的问题，即已知函数的导数（或微分），求出这个函数．即求一个可导函数，使它的导函数等于已知函数．例如，当质点做直线运动时，如果已知它的速度函数为 $v(t)$，如何求它的位置函数 $s(t)$呢？这便是本章将要研究的问题，也是积分学的基本问题之一．

本章先给出原函数和不定积分的概念，介绍它们的性质，进而讨论求不定积分的方法．

4.1　不定积分的概念与性质

4.1.1　原函数与不定积分的概念

定义 4.1　如果在区间 H 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 H 上的一个原函数．

例如，$\left(x^2\right)' = 2x$，故 x^2 是 $2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数．

$\left(x^2+2\right)' = 2x$，故 x^2+2 是 $2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数．

定理 4.1　（原函数存在性定理）如果函数 $f(x)$ 在区间 H 上连续，则在区间 H 上存在可导函数 $F(x)$，使得对任意的 $x\in H$，都有

$$F'(x) = f(x)$$

这个结论告诉我们连续函数一定有原函数．因为初等函数在其定义区间内连续，所以初等函数在其定义区间内一定有原函数．

函数 $f(x)$ 如果存在原函数 $F(x)$，那么原函数有无穷多个，$f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 有什么关系?

设 $G(x)$ 是 $f(x)$ 的任意一个原函数，即 $G'(x) = f(x)$，则有

$$\left[G(x)-F(x)\right]' = G'(x)-F'(x) = 0$$

由拉格朗日中值定理的推论 3.1 知，导数恒等于 0 的函数是常数，故

$$G(x)-F(x) = C$$

即

$$G(x) = F(x)+C$$

这表明 $G(x)$ 与 $F(x)$ 只相差一个常数，因此，只要找到 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$，$F(x)+C$（C 为任意常数）就可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数．

定义 4.2　在区间 H 上，函数 $f(x)$ 的全体原函数称为 $f(x)$ 在区间 H 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x$$

其中，$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 称为积分变量.

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

【例 1】求 $\int x^2\mathrm{d}x$.

解　因为 $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$，所以 $\int x^2\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3}+C$.

【例 2】求 $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x$.

解　由于 $\left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \sqrt{x}$，因此有 $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$.

【例 3】求 $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　由于 $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，因此有 $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|+C$.

【例 4】设曲线通过点(1,2)，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的 2 倍，求此曲线的方程.

解　设所求的曲线方程为 $y=f(x)$，按题设，曲线上任一点 (x,y) 处的切线斜率为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$，即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数. 因为

$$\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$$

故必有某个常数 C 使 $f(x)=x^2+C$，即曲线方程为 $y=x^2+C$. 因所求曲线通过点 $(1,2)$，故 $2=1+C$，$C=1$.

于是所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 本例即是求函数 $2x$ 通过点 $(1,2)$ 的那条积分曲线. 显然，这条积分曲线可以由另一条积分曲线（如 $y=x^2$）沿 y 轴方向平移得到（见图 4.1）.

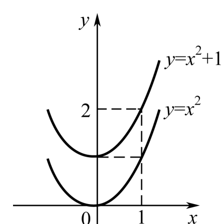


图 4.1

4.1.2　不定积分的性质

（1）$\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$.

（2）设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数都存在，则 $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

（3）$f(x)$ 的原函数存在，k 为非零常数，则 $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$.

（4）$\int F'(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left[F(x)\right] = F(x)+C$.

例如，$\int \mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{x^2}\right) = \mathrm{e}^{x^2}+C$，$\int \mathrm{d}x = x+C$.

4.1.3 基本公式

1. $\int k\mathrm{d}x = kx + C$

2. $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ （$\mu \neq -1$）

3. $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

4. $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

5. $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$

6. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$

7. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$

8. $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$

10. $\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$

11. $\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$

12. $\int \sec^{2} x\mathrm{d}x = \tan x + C$

13. $\int \csc^{2} x\mathrm{d}x = -\cot x + C$

14. $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$

15. $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$

16. $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan x + C$

17. $\int \dfrac{1}{a^{2}+x^{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$

18. $\int \dfrac{1}{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

19. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

20. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

21. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^{2}-a^{2}}\right| + C$

22. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}\right) + C$

【例 5】 求$\int\left(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^{3}}\right)\mathrm{d}x$．

解　$\int\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{x}+\frac{3}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+3\int x^{-3}\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x|-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}x^{-2}+C$$

【例 6】求 $\int\left(5\mathrm{e}^x+3\sin x-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

解　$\int\left(5\mathrm{e}^x+3\sin x-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=5\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+3\int\sin x\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=5\mathrm{e}^x-3\cos x-2\arctan x+C$$

【例 7】求 $\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=x-\arctan x+C$$

【例 8】求 $\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

解　$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(3\mathrm{e})^x\,\mathrm{d}x=\frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln(3\mathrm{e})}+C$

$$=\frac{3^x\mathrm{e}^x}{1+\ln 3}+C$$

【例 9】求 $\int\cot^2 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\cot^2 x\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x-1)\mathrm{d}x$

$$=\int\csc^2 x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x-x+C$$

【例 10】求 $\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x$.

解　$\int\sin^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C$$

加 油 站

【例 11】求 $\int\sqrt{x}\left(x^3+x-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$.

解　$\int\sqrt{x}\left(x^3+x-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{7}{2}}+x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-4\sqrt{x}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 12】求 $\int\frac{(x+1)^3}{x}dx$.

解　$\int\frac{(x+1)^3}{x}dx=\int\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x}dx$

$$=\int x^2dx+3\int xdx+3\int dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+\ln|x|+C$$

【例 13】求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

解　$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$

$$=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$$

【例 14】求 $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

解　$\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos xdx\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$$

【例 15】求 $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

解　$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{1}{\sin^2 x}dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$$

$$=-\cot x-\tan x+C$$

【例 16】求 $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$.

解　$\int\frac{dx}{1-\cos 2x}=\int\frac{1}{2\sin^2 x}dx=-\frac{1}{2}\cot x+C$

【例 17】求 $\int\frac{x^4+x^2}{x^2+1}dx$

解　$\int\frac{x^4+x^2}{x^2+1}dx=\int\left[\frac{x^2(x^2+1)}{x^2+1}\right]dx$

$$=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C$$

【例 18】求 $\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x$.

解 $\int \sec x(\sec x - \tan x)\mathrm{d}x = \int(\sec^2 x - \sec x \tan x)\mathrm{d}x$

$= \int \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \sec x \tan x\mathrm{d}x$

$= \tan x - \sec x + C$

习　题　4.1

一、填空题

1．$F(x)$是一个可导函数，则$\int F'(x)\mathrm{d}x =$__________.

2．$\int\left(\dfrac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x =$________________.

3．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\int \sin x\mathrm{d}x] =$________________.

4．已知$F(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$，则$F(x)$是____________的一个原函数.

5．$\int \dfrac{1}{x\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x =$______________.

6．$\int \dfrac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x =$_______________.

7．$\int \dfrac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x =$_____________.

8．$\int \dfrac{e^{2x}-1}{e^x+1}\mathrm{d}x =$_________________.

9．$\int\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x =$______________.

10．设$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，则$\int f'(x)\mathrm{d}x =$_______________.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x =$________________，$\int f(x)\mathrm{d}x =$______________.

二、单项选择题

1．已知函数$y = F(x)$的导数等于$2x+1$，且当$x = 3$时，$y = 13$，则$F(x)$为（　　）.

A．$x^2 + x + 1$　　B．$x^2 + 4$　　C．$x^2 - x + 5$　　D．$x^2 + x + 2$

2．已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则（　　）是$2xf(x^2)$的一个原函数.

A．$x^2F(x)$　　B．$xF(x)$　　C．$F(x^2)$　　D．$x^2F(x^2)$

3．已知$\int f(x)\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$，则$\int f'(x)\mathrm{d}x =$（　　）.

A．$xe^x - e^x + C$　　B．$xe^x + C$　　C．$xe^x + e^x + C$　　D．$xe^x - 2e^x + C$

4．过点$(0,1)$且在横坐标为x处的切线斜率为x^3的曲线方程为（　　）.

A．$\frac{1}{4}x^4+C$　B．$\frac{1}{4}x^4-1$　C．$\frac{1}{4}x^4+x$　D．$\frac{1}{4}x^4+1$

5．$\int f(x)\mathrm{d}x$ 指的是 $f(x)$ 的（　　）．

A．某个原函数　B．唯一的一个原函数

C．任意一个原函数　D．所有的原函数

6．设函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}$，则 $f'(x)=$（　　）．

A．$\frac{1}{x}$　B．$\ln|x|$　C．$\frac{2}{x^3}$　D．$-\frac{1}{x^2}$

7．如果函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则（　　）正确．

A．$\int F(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$　B．$\int F'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

C．$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$　D．$\int f'(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

8．如果函数 $F(x)$ 与 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在某区间 I 上的原函数，则在区间 I 上必有（　　）．

A．$F(x)=G(x)$　B．$F(x)=G(x)+C$

C．$F(x)=CG(x)$　D．$F(x)=\frac{1}{C}G(x)$

9．在函数 $f(x)$ 的积分曲线方程中，任一条曲线在横坐标相同的点处的切线（　　）．

A．平行于 x 轴　B．相互平行　C．平行于 y 轴　D．相互垂直

10．如果 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln\cos 3x+C$，则 $f(x)=$（　　）．

A．$-\tan 3x$　B．$\frac{1}{3}\sin 3x$　C．$\tan 3x$　D．$\frac{1}{3}\cos 3x$

三、计算题

1．求下列不定积分．

（1）$\int\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{3}\right)^2\mathrm{d}x$；　（2）$\int\frac{x^2+x^4\mathrm{e}^x+1}{x^4}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$；　（4）$\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$；

（5）$\int\frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；　（6）$\int\frac{\cos^2 x+1}{\cos 2x+1}\mathrm{d}x$；

（7）$\int\cot x(\cot x-\csc x)\mathrm{d}x$；　（8）$\int\csc x(\tan x-\csc x)\mathrm{d}x$；

（9）$\int\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$；　（10）$\int\frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$．

2．求函数 $y=\sin x$ 的一条积分曲线，使之过点 $(0,1)$．

3．某曲线在任一点处的切线斜率等于该点横坐标的倒数，且通过点$(\mathrm{e}^3,3)$，求此曲线的方程．

4．一质点做变速直线运动，加速度 $a(t)=13\sqrt{t}\,\mathrm{m/s^2}$，初始位置 $s(0)=100\mathrm{m}$，若初速度 $v(0)=25\mathrm{m/s}$，试求该质点的运动方程．

5．一根长 1m 的细棒放在 x 轴上，左端点在原点处，其密度为 $\rho(x)=3x+2x^2-\dfrac{x^3}{2}$（kg/m），求该棒的总质量[提示：密度 $\rho(x)$ 是质量 $m(x)$ 对 x 的变化率].

4.2　第一换元法

利用基本积分公式所能计算的不定积分是很有限的．因此，有必要进一步研究其他的积分方法．因为积分运算是微分运算的逆运算，本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分，利用中间变量代换得到复合函数的积分法，称为换元积分法，简称换元法．按照选取中间变量的不同方式将换元法分为两类，分别称为第一换元法和第二换元法．

下面先介绍第一换元法（也称凑微分法）．

在第 3 章讲微分时，曾给出了 14 个公式，不妨再抄录如下：

微分号中都可加常数 C，这里省略．

（1）$k\mathrm{d}x=\mathrm{d}(kx)$；

（2）$x^{\mu}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)$；

（3）$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\ln|x|\right)$；

（4）$a^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)$；

（5）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)$；

（6）$\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}\right)$；

（7）$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(-\cos x\right)$；

（8）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\sin x\right)$；

（9）$\sin\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left[\dfrac{-\cos\left(ax+b\right)}{a}\right]$；

（10）$\cos\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left[\dfrac{\sin\left(ax+b\right)}{a}\right]$；

（11）$\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\left(\tan x\right)$；

（12）$\csc^2 x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\left(-\cot x\right)$；

（13）$\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\arctan x\right)$；

（14）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\arcsin x\right)$．

由左到右掌握这 14 个公式，有利于本节的学习．

定理 4.2　如果 $\int f\left(u\right)\mathrm{d}u=F\left(u\right)+C$，$u=\varphi\left(x\right)$ 可导，则

$$\int f\left[\varphi\left(x\right)\right]\varphi'\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left[\varphi\left(x\right)\right]+C$$

由定理 4.2 可知，虽然$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x$是一个整体记号，但从形式上看，被积表达式中的 $\mathrm{d}x$ 可以当作变量 x 的微分来对待，$\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$，以后可以这样应用了，如$\int F'(x)\,\mathrm{d}x=\int\,\mathrm{d}F(x)=F(x)+C$．

【例 1】求$\int\cos(3x+2)\mathrm{d}x$．

解　设$3x+2=u$，则有

$$\begin{aligned}\int\cos(3x+2)\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int\cos(3x+2)\mathrm{d}(3x+2)\\&=\frac{1}{3}\int\cos u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}\sin u+C=\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C\end{aligned}$$

以后熟练了，可以不设u，直接给出答案.

【例 2】求$\int\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x$．

解　$$\begin{aligned}\int\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x+1}\mathrm{d}(2x+1)\\&=\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C\end{aligned}$$

【例 3】求$\int x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x$．

解　$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{8}\int\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\left(4x^2+1\right)\\&=\frac{1}{12}\left(1+4x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

【例 4】求$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=-\int\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$$

【例 5】求$\int x^2\mathrm{e}^{2x^3+1}\mathrm{d}x$．

解　$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{2x^3+1}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{6}\int\mathrm{e}^{2x^3+1}\,\mathrm{d}\left(2x^3+1\right)\\&=\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2x^3+1}+C\end{aligned}$$

【例 6】求$\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$．

解　$$\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\ln|\ln x|+C$$

【例 7】求$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$．

解　$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{1+\ln x}\,\mathrm{d}(1+\ln x)=\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$$

【例 8】求$\int\cos x\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$．

解　$\int \cos x \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}(\sin x) = \mathrm{e}^{\sin x} + C$

【例 9】求 $\int \tan x \mathrm{d}x$.

解　$\int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x) = -\ln|\cos x| + C$

【例 10】求 $\int \frac{\sqrt{1+\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{\sqrt{1+\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\arctan x}\,\mathrm{d}(1+\arctan x) = \frac{2}{3}(1+\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C$

【例 11】求 $\int \frac{\mathrm{e}^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{\mathrm{e}^{2\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2\arcsin x}\,\mathrm{d}(2\arcsin x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\arcsin x} + C$

有时还要会使用一些常见的技巧：加一项，减一项；乘一项，除一项.

【例 12】求 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

【例 13】求 $\int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1) \\
&= \int \mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x+1) - \int \frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x) \\
&= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} + C
\end{aligned}$$

【例 14】求 $\int \csc x \mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}
\int \csc x \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x} \\
&= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right| + C
\end{aligned}$$

$$=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|+C=\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$$

常用凑微分公式如表 4.1 所示。

表 4.1　常用凑微分公式

	积 分 类 型	换 元 公 式
第一换元积分法	1. $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$ 　（$a\neq0$）	$u=ax+b$
	2. $\int f\left(x^{u}\right)x^{u-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int f(x^{u})\mathrm{d}(x^{u})$ 　（$u\neq0$）	$u=x^{u}$
	3. $\int f(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$	$u=\ln x$
	4. $\int f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})$	$u=\mathrm{e}^{x}$
	5. $\int f(a^{x})a^{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^{x})\mathrm{d}(a^{x})$	$u=a^{x}$
	6. $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$	$u=\sin x$
	7. $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$	$u=\cos x$
	8. $\int f(\tan x)\sec^{2}x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$	$u=\tan x$
	9. $\int f(\cot x)\sec^{2}x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$	$u=\cot x$
	10. $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^{2}}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)$	$u=\arctan x$
	11. $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$	$u=\arcsin x$

此外，还要记住三种常见的形式.

第一种：被积函数是三角函数的几次方.

正弦与余弦的做法基本一样，只需记住：奇数次方往微分号里送一个$\sin x$或$\cos x$，变为$-\cos x$或$\sin x$．偶数次方，写成$\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$或$\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$即可.

【例 15】求$\int\sin^3 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\sin^3 x\mathrm{d}x=-\int\sin^2 x\,\mathrm{d}\cos x$

$$=\int\left(\cos^2 x-1\right)\mathrm{d}\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$$

【例 16】求$\int\cos^2 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\cos^2 x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

正切与余切的做法基本一样，只需记住：将其中的一个$\tan^2 x$化成$\sec^2 x-1$或$\cot^2 x=\csc^2 x-1$，其余的一律不变.

【例 17】求$\int\tan^2 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\tan^2 x\mathrm{d}x=\int\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x=\tan x-x+C$

【例 18】求$\int\cot^3 x\mathrm{d}x$.

解　$\int\cot^3 x\mathrm{d}x=\int\left(\csc^2 x-1\right)\cot x\mathrm{d}x=\int\csc^2 x\cot x\mathrm{d}x-\int\cot x\mathrm{d}x$

$$=-\int \csc x \, \mathrm{d} \csc x-\int \cot x \mathrm{d} x=-\frac{1}{2} \csc ^{2} x-\ln |\sin x|+C$$

正割与余割的做法基本一样，只需记住：将 $\sec^{2} x \mathrm{d} x=\mathrm{d} \tan x$，或 $\csc^{2} x \mathrm{d} x=\mathrm{d}(-\cot x)$.

【例 19】求 $\int \sec^{4} x \mathrm{d} x$.

解　$\int \sec ^{4} x \mathrm{d} x=\int \sec ^{2} x \mathrm{d}(\tan x)=\int(1+\tan ^{2} x) \mathrm{d}(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3} \tan ^{2} x+C$

第二种：$\int \frac{\text{常数}}{\text{二次}} \mathrm{d} x$ 或 $\int \frac{\text{常数}}{\sqrt{\text{二次}}} \mathrm{d} x$，方法是配平方.

【例 20】求 $\int \frac{1}{x^{2}+2 x+3} \mathrm{d} x$.

解　
$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^{2}+2 x+3} \mathrm{d} x&=\int \frac{1}{(x+1)^{2}+(\sqrt{2})^{2}} \mathrm{d} x \\
&=\int \frac{1}{(x+1)^{2}+(\sqrt{2})^{2}} \mathrm{d}(x+1) \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}}+C
\end{aligned}$$

【例 21】求 $\int \frac{1}{\sqrt{4 x-x^{2}}} \mathrm{d} x$.

解　$\int \frac{1}{\sqrt{4 x-x^{2}}} \mathrm{d} x=\int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^{2}}} \mathrm{d}(x-2)=\arcsin \frac{x-2}{2}+C$

第三种：$\int \frac{\text{一次}}{\text{二次}} \mathrm{d} x$ 或 $\int \frac{\text{一次}}{\sqrt{\text{二次}}} \mathrm{d} x$.

【例 22】求 $\int \frac{2 x+3}{x^{2}+3 x+1} \mathrm{d} x$.

解　$\int \frac{2 x+3}{x^{2}+3 x+1} \mathrm{d} x=\int \frac{1}{\left(x^{2}+3 x+1\right)} \mathrm{d}\left(x^{2}+3 x+1\right)=\ln \left|x^{2}+3 x+1\right|+C$

其特点是分子恰好为 $2x+3$，常数 3 为分母一次项的系数，结果为 $\ln|\text{分母}|+C$.

【例 23】求 $\int \frac{x+1}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d} x$.

解　分母 x^2-2x+5 的导数等于 $2x-2=2(x-1)$，故把分子 $x+1$ 化为 $x-1+2$，于是有

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d} x&=\int \frac{(x-1)+2}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d} x \\
&=\int \frac{x-1}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d} x+2 \int \frac{1}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d} x \\
&=\frac{1}{2} \int \frac{1}{x^{2}-2 x+5} \mathrm{d}(x^{2}-2 x+5)+2 \int \frac{1}{(x-1)^{2}+2^{2}} \mathrm{d}(x-1) \\
&=\frac{1}{2} \ln |x^{2}-2 x+5|+\arctan \frac{x-1}{2}+C
\end{aligned}$$

【例 24】求 $\int \frac{x}{\sqrt{2 x-x^{2}}} \mathrm{d} x$.

解　$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+2-2}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}\left(2x-x^2\right) - 2\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}\left(2x-x^2\right) - 2\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\mathrm{d}(x-1)\right]$$
$$= -\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1) + C$$

以上三种类型题出现的频率较大，所以应该熟练掌握.

加 油 站

【例 25】求$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

解　技巧：有理化
$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}(x+1) + \int \sqrt{x-1}\,\mathrm{d}(x-1)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\right] + C$$

【例 26】求$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x}\mathrm{d}x$$
$$= \int \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + C$$

【例 27】求$\int \frac{1}{\sin x\cos x+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \frac{1}{\sin x\cos x+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x(\tan x+1)}\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{\tan x+1}\mathrm{d}(\tan x+1)$$
$$= \ln\left|\tan x+1\right| + C$$

【例 28】求$\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\ln\tan x}{\cos^2 x\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\ln\tan x}{\tan x}\mathrm{d}\tan x$$
$$=\int\ln\tan x\,\mathrm{d}\ln\tan x$$
$$=\frac{1}{2}\ln^2\tan x+C$$

【例 29】求 $\int\frac{\sec^2 x}{4+\tan^2 x}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{4+\tan^2 x}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\tan x}{2}\right)}{1+\left(\frac{\tan x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2}+C$$

【例 30】求 $\int\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{x^2}{1+x^6}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\arctan x^3+C$$

【例 31】求 $\int\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$.

解　$$\int\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\cos\left(\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}\left(\frac{2}{x}+1\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{x}+1\right)+C$$

【例 32】求 $\int\tan^5 x\sec^3 x\mathrm{d}x$.

解　$$\int\tan^5 x\sec^3 x\mathrm{d}x=\int\tan^4 x\sec^2 x\cdot\sec x\tan x\mathrm{d}x$$
$$=\int(\sec^2 x-1)^2\sec^2 x\mathrm{d}(\sec x)$$
$$=\int(\sec^6 x-2\sec^4 x+\sec^2 x)\mathrm{d}(\sec x)$$
$$=\frac{1}{7}\sec^7 x-\frac{2}{5}\sec^5 x+\frac{1}{3}\sec^3 x+C$$

【例 33】求 $\int\cos 3x\cos 2x\mathrm{d}x$.

解　利用三角函数的积化和差公式:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$
$$\int\cos 3x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\cos x\mathrm{d}x+\int\cos 5x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$$

【例 34】求 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　被积函数的分子、分母同乘以（$1-\cos x$），得

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{(1+\sin x)(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$=\frac{1+\sin x-\cos x-\sin x\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\csc^2 x+\csc x-\csc x\cot x-\cot x$$

所以

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int(\csc^2 x+\csc x-\csc x\cot x-\cot x)\mathrm{d}x$$
$$=-\cot x+\ln|\csc x-\cot x|+\csc x-\ln|\sin x|+C$$

习　题　4.2

一、填空题

1. $\int \mathrm{e}^{3x+2}\mathrm{d}x=$________；

2. $\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}\mathrm{d}x=$ ________；

3. $\int\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}\mathrm{d}x=$________；

4. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$________；

5. $\int x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$________；

6. $\int x\cos\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x=$________；

7. $\int\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=$________；

8. $\int\cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=$________；

9. $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-3x^3}}\mathrm{d}x=$________；

10. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+\arctan x}}=$________.

二、单项选择题

1. $\int\mathrm{e}^x\sin\left(\mathrm{e}^x+1\right)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $-\cos\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$　　B. $-\sin\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$

C. $\cos\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$　　D. $\sin\left(\mathrm{e}^x+1\right)+C$

2. 如果 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$　则 $\int\frac{f(\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $F(\cot x)+C$　　B. $-F(\cot x)+C$

C. $F(\tan x)+C$　　D. $-F(\tan x)+C$

3. $\int\sin 2x\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $2\cos 2x+C$　　B. $\cos 2x+C$

C. $-\sin^2 x + C$　　D. $-\cos^2 x + C$

4. $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}\cos x =$（　　）.

A. $-\dfrac{1}{\cos x} - x + C$　　B. $-\dfrac{1}{\cos x} - \cos x + C$

C. $\tan x - x + C$　　D. $\tan x - \cos x + C$

5. $\int \dfrac{\ln^2 x}{x} \mathrm{d}x =$（　　）.

A. $2\ln^2 x + C$　　B. $3\ln^3 x + C$　　C. $\dfrac{1}{3}\ln^3 x + C$　　D. $\dfrac{1}{2}\ln^3 x + C$

6. $\int \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+2}} \mathrm{d}x =$（　　）.

A. $\mathrm{e}^{x+2} + C$　　B. $-\mathrm{e}^{x+2} + C$　　C. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+2}} + C$　　D. $-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+2}} + C$

7. $\int \dfrac{x}{4 + x^2} \mathrm{d}x =$（　　）.

A. $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2} + C$　　B. $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{x}{2} + C$

C. $\dfrac{1}{2}\ln\left(4 + x^2\right) + C$　　D. $2\ln\left(4 + x^2\right) + C$

8. 如果$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$，则$\int \mathrm{e}^{-x} f\left(\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x =$（　　）.

A. $-F\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + C$　　B. $-F\left(\mathrm{e}^{x}\right) + C$

C. $F\left(\mathrm{e}^{-x}\right) + C$　　D. $F\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) + C$

9. 如果$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x^2} + C$，则 $f(x) =$（　　）.

A. e^{-x^2}　　B. $-2x\mathrm{e}^{-x^2}$　　C. e^{x^2}　　D. $-2x\mathrm{e}^{x^2}$

10. 如果$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2} + C$，则$\int x^2 f\left(1 - x^3\right)\mathrm{d}x =$（　　）.

A. $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\left(1-x^3\right)^2} + C$　　B. $3\mathrm{e}^{\left(1-x^3\right)^2} + C$

C. $-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\left(1-x^3\right)^2} + C$　　D. $-3\mathrm{e}^{\left(1-x^3\right)^2} + C$

三、计算下列不定积分

1. $\int \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x} \mathrm{d}x$；　　2. $\int \dfrac{1}{x \ln x \ln\ln x} \mathrm{d}x$；

3. $\int (4x - 1)^4 \, \mathrm{d}x$；　　4. $\int \dfrac{1}{9 - 4x^2} \mathrm{d}x$；

5. $\int \dfrac{1}{\cos^2(4x + 3)} \mathrm{d}x$；　　6. $\int \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1 + x)} \mathrm{d}x$；

7. $\int \sin 3x \cos 2x \mathrm{d}x$；　　8. $\int \dfrac{2x - 3}{x^2 - 5x + 6} \mathrm{d}x$；

9. $\int \dfrac{x}{\sqrt{3 + 2x - x^2}} \mathrm{d}x$；　　10. $\int \dfrac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$；

11．$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}\mathrm{d}x$；

12．$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\mathrm{d}x$；

13．$\int x^2\sqrt[7]{3x^3+1}\,\mathrm{d}x$；

14．$\int \frac{1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$；

15．$\int \frac{x+1}{x^2+4x+6}\mathrm{d}x$；

16．$\int \frac{x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$；

17．$\int \frac{1}{1-\cos x}\mathrm{d}x$；

18．$\int \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x$．

4.3 第二换元法

上节介绍的第一换元法是通过变量代换 $u=\varphi(x)$，将积分 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$ 化成积分 $\int f(u)\mathrm{d}u$．

本节介绍的第二换元法是反其道而行之，求积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 先做变换 $x=\varphi(t)$，把不容易求的积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 化成容易求的积分，即

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

求出上式右端的积分值，再用 $x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 化回原来的变量 x．

定理 4.3 设 $x=\varphi(t)$ 是单调的可导函数，并且 $\varphi'(t)\neq 0$，又设 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数，则有换元公式

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

式中，$\varphi^{-1}(x)$ 是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

下面举例说明第二类换元法定理的应用.

1．被积函数含有根式 $\sqrt[n]{ax+b}$

【例 1】 求 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x}=t$，即做变量代换 $x=t^2$（$t>0$），$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，代入不定积分得

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}\mathrm{d}t \\ &= 2\left[\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\right] \\ &= 2(t-\ln|1+t|)+C \\ &\xlongequal{\text{回代}} 2(\sqrt{x}-\ln|1+\sqrt{x}|)+C\end{aligned}$$

【例 2】 求 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$.

解 令 $\sqrt{x-2}=t$，即做变量代换 $x=2+t^2$（$t>0$），$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，代入不定积分得

$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x = \int \frac{2+t^2+1}{(2+t^2)t}\cdot 2t\mathrm{d}t = 2\left[\int\left(1+\frac{1}{2+t^2}\right)\mathrm{d}t\right]$$
$$=2\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C$$
$$\overset{\text{回代}}{=\!=}2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$$

【例 3】求 $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$.

解　两个根号开方次数不一样，能否设一个根号为 t，使两个根号都化成 t 的多项式呢？显然设 $x^{\frac{1}{6}}=t$ 即可.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x \overset{x^{\frac{1}{6}}=t}{=\!=} 6\int\frac{t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t = 6\int\frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t = 6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right)+C$$
$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+C$$

【例 4】求 $\int \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解　设 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$，$x=\ln\left(t^2+1\right)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$.

$$\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x = \int\frac{2t}{t\left(t^2+1\right)}\mathrm{d}t = 2\int\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
$$=2\arctan t+C$$
$$=2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$$

2．被积函数含有根式 $\sqrt{a^2-x^2}$ 或 $\sqrt{x^2\pm a^2}$

【例 5】求 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解　令 $x=a\sin u\left[u\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right]$，则 $\mathrm{d}x=a\cos u\mathrm{d}u$，$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos u$. 于是

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a\cos u\cdot a\cos u\mathrm{d}u$$
$$=a^2\int\cos^2 u\mathrm{d}u$$
$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2u)\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(u+\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C$$

根据变量代换 $x=a\sin u$ 做直角三角形（见图 4.2），求出

$$\sin u=\frac{x}{a}，\ \cos u=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$

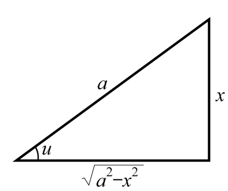


图 4.2

$$\sin 2u=2\sin u\cos u=\frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2-x^2}$$

把 u 回代成 x 的函数，得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

【例 6】求 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）.

解　令 $x=a\sec u\left[u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$，则 $\mathrm{d}x=a\sec u\tan u\mathrm{d}u$，$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan u$. 于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sec u\tan u}{a\tan u}\mathrm{d}u=\int\sec u\mathrm{d}u$$

$$=\ln|\sec u+\tan u|+C_1$$

根据变量代换 $x=a\sec u$ 做直角三角形（见图 4.3），求出

$$\sec u=\frac{x}{a},\quad \tan u=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$$

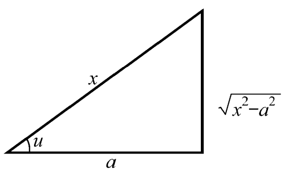


图 4.3

把 u 回代成 x 的函数，得

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

式中，$C=C_1-\ln a$ 为任意常数.

【例 7】求 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$　（$a>0$）.

解　令 $x=a\tan u$，$\left[u\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right]$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2u\mathrm{d}u$，$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec u$. 于是

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sec^2u}{a^2\tan^2u\cdot a\sec u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{\sec u}{\tan^2u}\mathrm{d}u=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos u}{\sin^2u}\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin u}+C$$

根据变量代换 $x=a\tan u$ 做直角三角形（见图 4.4），求出

$$\sin u=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

把 u 回代成 x 的函数，得

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C$$

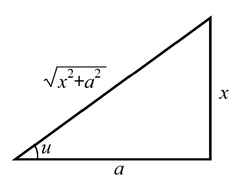


图 4.4

用同样的方法可求得

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

注意：三角代换有时也可以用于其他形式的被积函数，如$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$（$a$>0）就可用三角代换 $x = a\tan u$ 把被积函数化为易于积分的形式.

【例 8】求$\int x\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x$.

解　被积函数含有二次根式，用第二类换元法，做三角代换 $x=a\sec u$ 可化去根号. 于是$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan u$，$\mathrm{d}x=a\sec u\tan u\mathrm{d}u$，代入不定积分得

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x &= \int a\sec u\cdot a\tan u\cdot a\sec u\cdot \tan u\mathrm{d}u\\ &= a^3\int \sec^2 u\cdot\tan^2 u\mathrm{d}u = a^3\int\tan^2 u\mathrm{d}(\tan u)\\ &= \frac{a^3}{3}\tan^3 u + C = \frac{a^3}{3}\cdot\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}+C\\ &= \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

若用凑微分法，把 $x\mathrm{d}x$“凑成”$\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2-a^2)$，则

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(x^2-a^2)\\ &= \frac{1}{3}(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

显然，这种方法比用第二类换元法方便得多.

加 油 站

【例 9】求$\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解　设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int\frac{t^3}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int\frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t\\ &= 2\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 2\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|\right)+C\\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-x+2\sqrt{x}-2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)+C\end{aligned}$$

【例 10】求$\int x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$.

解　设$\sqrt{1-x}=t$，则$x=1-t^2$，$\mathrm{d}x=-2t\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int\left(1-t^2\right)t(-2t)\mathrm{d}t\\ &= \int\left(2t^4-2t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C\\ &= \frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+C\end{aligned}$$

【例 11】求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$．

解　设 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$\mathrm{d}x=6t^5\,\mathrm{d}t$，$\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=6\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=6\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=6\left(t-\arctan t\right)+C$$
$$=6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+C$$

【例 12】求 $\int\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\mathrm{d}x$．

解　设 $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}=t$，则 $x=\dfrac{\ln\left(t^2+1\right)}{2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t$，有

$$\int\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$
$$=t-\arctan t+C$$
$$=\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}-\arctan\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1}+C$$

【例 13】求 $\int\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x$．

解　设 $\ln x=t$，则有

$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\int\frac{\sqrt{1+t}}{t}\mathrm{d}t\quad（设\ \sqrt{1+t}=u\ ）$$
$$=2\int\frac{u^2}{u^2-1}\mathrm{d}u=2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)\mathrm{d}u$$
$$=2\left(u-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)+C$$
$$=2\left(\sqrt{1+t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+t}}{1-\sqrt{1+t}}\right|\right)+C$$
$$=2\left(\sqrt{1+\ln x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\ln x}}{1-\sqrt{1+\ln x}}\right|\right)+C$$

【例 14】求 $\int\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x$．

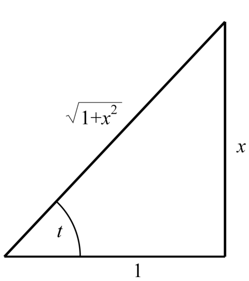


图 4.5

解　$$\int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=\!=\!=}\int\frac{\sec^3 t}{\tan t}\mathrm{d}t=\int\frac{\left(\tan^2 t+1\right)\sec t}{\tan t}\mathrm{d}t$$
$$=\int\sec t\tan t\,\mathrm{d}t+\int\frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t=\sec t+\ln\left|\frac{1}{\sin t}-\cot t\right|+C$$
$$=\sqrt{1+x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right|+C$$

（见图 4.5，由 $x=\tan t$，有 $\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cot t=\dfrac{1}{x}$）.

【例 15】求 $\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x$.

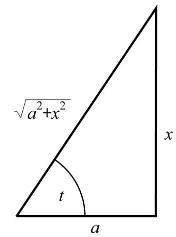


图 4.6

解　因为 $x \in \mathbf{R}$，所以无论有无根号，都可以设 $x = a\tan t$（见图 4.6）.

$$\mathrm{d}x = a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{a\sec^2 t}{a^4\cdot\sec^4 t}\mathrm{d}t = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^3}\int\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{1}{2a^3}\left(t+\sin t\cos t\right)+C \\ &= \frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)+C \\ &= \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{x^2+a^2}\right)+C\end{aligned}$$

习　题　4.3

一、填空题

1．$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x =$______________；

2．$\int \frac{\sqrt{2x-1}}{x}\mathrm{d}x =$______________；

3．$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x-1}}\mathrm{d}x =$______________；

4．$\int \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x =$______________；

5．$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x =$______________；

6．$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x =$______________；

7．$\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\mathrm{d}x =$______________；

8．$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+9}}\mathrm{d}x =$______________；

二、单项选择题

1．$\int \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x =$（　　）.

A．$\sqrt{2x+1}-\ln\left(1+\sqrt{2x+1}\right)+C$　　B．$\sqrt{2x+1}+\ln\left(1+\sqrt{2x+1}\right)+C$

C．$\sqrt{2x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2x+1}\right)+C$　　D．$\sqrt{2x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2x+1}\right)+C$

2. $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x =$（　　）.

A. $3\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$

B. $\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$

C. $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$

D. $\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$

3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} =$（　　）.

A. $\arcsin\left(x-\frac{3}{2}\right)+C$　　B. $2\arcsin(2x-3)+C$

C. $\arcsin(2x-1)+C$　　D. $\arcsin(2x-3)+C$

4. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x =$(　　).

A. $x-\ln\left(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$　　B. $x-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$

C. $2x+\ln\left(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$　　D. $2x-\ln\left(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)+C$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x =$(　　).

A. $\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}+C$　　B. $2\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)+C$

C. $\frac{1}{2}\left(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right)+C$　　D. $\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}+C$

三、计算下列各不定积分

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$；　　2. $\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$；

3. $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；　　4. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\mathrm{d}x$；

5. $\int \sqrt{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$；　　6. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$；

7. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$；　　8. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$；

9. $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$；　　10. $\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

4.4　分部积分法

由函数乘积的求导法则，可得到不定积分的又一重要方法——分部积分法.

设函数 $u(x)$、$v(x)$均有连续的导数，由

$$(uv)'=u'v+uv'$$

得

$$uv'=(uv)'-u'v$$

两边对 x 求不定积分，得

$$\int uv'\mathrm{d}x = uv-\int u'v\mathrm{d}x$$

或写为

$$\int u\mathrm{d}v = uv-\int v\mathrm{d}u$$

这就是分部积分公式．当$\int u'v\mathrm{d}x$ 比$\int uv'\mathrm{d}x$ 易求时，就可应用分部积分公式.

通常，当被积函数是 $x^n\ln x$、$x^n\sin x$、$x^n\cos x$、$x^n\arcsin x$、$x^n\arctan x$、$x^n\mathrm{e}^x$ 等类型时，适合用分部积分法．而实用上都是$\int uv'\,\mathrm{d}x$ 这种形式，被积函数是两个函数的乘积，哪个函数进入微分号呢？由经验给出如下常见的形式.

4.4.1　$\int$幂×三角（或指数）$\mathrm{d}x$

此时将三角函数（或指数函数）送进微分号内配平.

【例 1】求$\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解　选择 $\cos x$ 进入微分号，由 $\cos x\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\sin x)$，得

$$\int x\boxed{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

若选择 x 进入微分号，则由 $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，得

$$\int \boxed{x}\,\cos x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos x\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}[x^2\cos x - \int x^2\mathrm{d}(\cos x)]$$
$$= \frac{1}{2}(x^2\cos x + \int x^2\sin x\mathrm{d}x)$$

因为积分$\int x^2\sin x\mathrm{d}x$ 比原积分更复杂，所以不可以这样做.

【例 2】求$\int x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解　$\int x\boxed{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -(x\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)$

$$= -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + C = -\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C$$

【例 3】求$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解　$\int x^2\boxed{\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x}) = -[x^2\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}(x^2)]$

$$= -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}(x+1) + C$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+2)+C$$

4.4.2 $\int$ 幂×对（或反三角）$\mathrm{d}x$

此时将幂函数送进微分号内配平.

【例 4】求 $\int x\arctan \mathrm{d}x$.

解　只有 x 可进入微分号，由 $x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，得

$$\begin{aligned}\int \boxed{x}\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}(x^2)\\ &=\frac{1}{2}\left[x^2\arctan x-\int x^2\mathrm{d}(\arctan x)\right]\\ &=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x-\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\ &=\frac{1}{2}\left[x^2\arctan x-\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]\\ &=\frac{1}{2}(x^2\arctan x+\arctan x-x)+C\end{aligned}$$

【例 5】求 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解　直接应用分部积分公式，即取 $u=\ln x$、$v=x$，得

$$\begin{aligned}\int \ln x\mathrm{d}x &= x\ln x-\int x\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ &=x\ln x-\int \mathrm{d}x=x\ln x-x+C\end{aligned}$$

4.4.3 $\int$ 三角×指数 $\mathrm{d}x$

此时将三角函数或指数函数送进微分号内配平.

【例 6】求 $\int e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解
$$\begin{aligned}\int \boxed{e^x}\sin x\mathrm{d}x &= \int \sin x\mathrm{d}(e^x)= e^x\sin x-\int e^x\mathrm{d}(\sin x)\\ &=e^x\sin x-\int e^x\cos x\mathrm{d}x\\ &=e^x\sin x-\int \cos x\mathrm{d}(e^x)\\ &=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

等号右侧最后一项的积分即为所要求的不定积分，移项得

$$2\int e^x\sin x\mathrm{d}x=e^x(\sin x-\cos x)+C_1\quad (\text{自动添上任意常数 } C_1)$$

于是

$$\int e^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$$

在例 6 中，两次使用分部积分公式时，都是取指数函数进入微分号，也可以两次都取三角

函数进入微分号而解之.

【例 7】求$\int \sec^3 x\mathrm{d}x$.

解 $$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \int \boxed{\sec^2 x}\,\sec x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}(\tan x)$$
$$= \sec x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}(\sec x)$$
$$= \sec x\tan x - \int \tan x\sec x\tan x\mathrm{d}x$$
$$= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= \sec x\tan x - \int \sec^3 x\mathrm{d}x + \int \sec x\mathrm{d}x$$
$$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x$$

故$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x+\tan x|)+C$

在计算不定积分时，有时要兼用换元法与分部积分法.

【例 8】求$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解　令$\sqrt{x}=u$，即做代换$x=u^2$（$u>0$），$\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$．于是
$$\int \sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin u\cdot 2u\mathrm{d}u = 2\int u\sin u\mathrm{d}u$$
$$= -2\int u\mathrm{d}(\cos u) = -2\left(u\cos u - \int \cos u\mathrm{d}u\right)$$
$$= -2(u\cos u - \sin u) + C$$
$$= 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C$$

通过前几节不定积分的学习，可以体会到积分比微分复杂多了，甚至有些看上去并不复杂的不定积分，如
$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \quad (0<k<1)$$
都不能用初等函数来表示，即被积函数的原函数不是初等函数．在这种情况下，就说不定积分“积不出”.

加 油 站

【例 9】求$\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

解　设$\sqrt{2x-1}=t$，则$x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$，有
$$\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t t\,\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}\mathrm{e}^t$$
$$= t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t(t-1)+C$$
$$= \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)+C$$

【例 10】求$\int \left(x^2-1\right)\cos 2x\mathrm{d}x$.

解 $\int(x^2-1)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(x^2-1)\mathrm{d}\sin 2x$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin 2x-\int\sin 2x\,\mathrm{d}(x^2-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin 2x-2\int x\sin 2x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin 2x+\int x\,\mathrm{d}(\cos 2x)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin 2x+\left(x\cos 2x-\int\cos 2x\mathrm{d}x\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x^2-1)\sin 2x+x\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]+C$$

【例 11】求 $\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$（$ab\neq 0$）.

解 $\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\sin bx\,\mathrm{d}\,\mathrm{e}^{ax}$

$$=\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\int\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}\sin bx\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[\mathrm{e}^{ax}\sin bx-b\int\mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int\cos bx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\left[\mathrm{e}^{ax}\cos bx-\int\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}(\cos bx)\right]$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x$$

移项整理得

$$\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{a^2}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}\left(\frac{1}{a}\sin bx-\frac{b}{a^2}\cos bx\right)+C$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

【例 12】求 $\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\int\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right)=-\left[\frac{\ln x}{x+1}-\int\frac{1}{x+1}\mathrm{d}(\ln x)\right]$

$$=-\frac{\ln x}{x+1}+\int\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln x}{x+1}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\ln x}{x+1}+\ln x-\ln(x+1)+C$$

【例 13】求 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int \frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{x}{(1+e^x)^2}d(e^x+1)$

$$= -\int x\,d\frac{1}{e^x+1} = -\left(\frac{x}{e^x+1} - \int \frac{1}{e^x+1}dx\right)$$

$$= -\frac{x}{e^x+1} + \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx$$

$$= -\frac{x}{e^x+1} + x - \int \frac{1}{e^x+1}d(e^x+1)$$

$$= x - \frac{1}{e^x+1} - \ln(e^x+1) + C$$

【例 14】求 $\int \cos\sqrt{1-x}dx$.

解　设 $\sqrt{1-x} = t$ ，则 $x = 1-t^2$ ， $dx = -2t\,dt$ ，有

$$\int \cos\sqrt{1-x}dx = -2\int t\cos t\,dt$$

$$= -2\int t\,d\sin t = -2\left(t\sin t - \int \sin t\,dt\right)$$

$$= -2(t\sin t + \cos t) + C$$

$$= -2\left(\sqrt{1-x}\sin\sqrt{1-x} + \cos\sqrt{1-x}\right) + C$$

【例 15】求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx$.

解　$\int \frac{\arctan e^x}{e^x}dx = -\int \arctan e^x d(e^{-x})$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int e^{-x}d(\arctan e^x)$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int \frac{e^{-x}e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + \int \frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+e^{2x}}d(e^{2x}+1)$$

$$= -e^{-x}\arctan e^x + x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C$$

【例 16】求 $\int \ln(1+\sqrt{x})dx$.

解　设 $\sqrt{x} = t$ ，则 $x = t^2$.

$$\int \ln(1+\sqrt{x})dx = \int \ln(1+t)dt^2$$

$$= t^2\ln(1+t) - \int t^2 d\ln(1+t)$$

$$= t^2\ln(1+t) - \int \frac{t^2}{t+1}dt$$

$$= t^2\ln(1+t) - \int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=t^2\ln(1+t)-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|1+t|+C$$
$$=x\ln(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$$

【例 17】求 $\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$.

解　$\int(\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x \xlongequal[x=\sin t]{\arcsin x=t} \int t^2\,\mathrm{d}\sin t$

$$=t^2\sin t-\int\sin t\,\mathrm{d}t^2=t^2\sin t-2\int t\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$=t^2\sin t+2\int t\,\mathrm{d}\cos t$$
$$=t^2\sin t+2\left(t\cos t-\int\cos t\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$$
$$=(\arcsin x)^2x+2(\arcsin x)\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$$

习　题　4.4

一、填空题

1．$\int x\sin x\mathrm{d}x=$__________；

2．$\int x\ln x\mathrm{d}x=$____________；

3．$\int \arccos x\mathrm{d}x=$___________；

4．$\int x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=$___________；

5．$\int \cos x\ln x\mathrm{d}x=$______________；

6．$\int \arctan x\mathrm{d}x=$___________；

7．$\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x=$_____________；

8．$\int x\sin x\cos x\mathrm{d}x=$__________________；

9．已知 e^{-x} 是 $f(x)$的一个原函数，则 $\int xf(x)\,\mathrm{d}x=$_______________；

10．已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int xf'(x)\,\mathrm{d}x=$_______________.

二、单项选择题

1．$\int\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$2\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C$　　B．$\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C$

C．$2\sqrt{x}\ln(1+x)-2\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C$　　D．$2\sqrt{x}\ln(1+x)-4\sqrt{x}+2\arctan\sqrt{x}+C$

2．$\int \mathrm{e}^{x}\arctan\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$2e^x\arctan e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C$　　B．$e^x\arctan e^{-x}+\ln\left(1+e^{2x}\right)+C$

C．$e^x\arctan e^{-x}+\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C$　　D．$e^x\arctan e^{-x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)+C$

3．$\int x\arctan\sqrt{x^2-1}\,dx=$（　　）.

A．$x^2\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$　　B．$\frac{x^2}{2}\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}+C$

C．$\frac{1}{2}x^2\arctan\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}+C$　　D．$\frac{1}{2}x^2\arctan\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}+C$

4．$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}dx=$（　　）.

A．$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C$　　B．$x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$

C．$x\arcsin x+\ln\sqrt{1-x^2}+C$　　D．$\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}+C$

三、计算下列积分

1．$\int e^x\cos x dx$；　　2．$\int\sqrt{x}\ln x dx$；

3．$\int\ln^2 x dx$；　　4．$\int\arcsin x dx$；

5．$\int xe^x dx$；　　6．$\int x^2e^x dx$；

7．$\int x^2\cos x dx$；　　8．$\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx$；

9．$\int\sin\ln x dx$；　　10．$\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

*4.5　有理函数与三角函数有理式的积分

1．有理函数的积分

设 $P(x)$和 $Q(x)$是两个多项式，称$\frac{P(x)}{Q(x)}$为有理函数，又称有理分式．当多项式 $P(x)$的次数比多项式 $Q(x)$的次数低时，称此有理函数为真分式，否则称为假分式．

一般说来，求有理函数积分可分以下三个步骤．

第一步，当有理函数为假分式时，可以通过多项式的除法把它化为一个多项式与一个真分式的和，如

$$\frac{x^3+5x^2+9x+7}{x^2+3x+2}=x+2+\frac{x+3}{x^2+3x+2}$$

第二步，将真分式分解成部分分式之和．

根据代数知识，可以将真分式中的分母在实数范围内分解成一次因式和二次质因式的乘积，然后将真分式分解成如下形式的一些部分分式之和：

$$\frac{A}{x-a},\quad \frac{A}{(x-a)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

式中，k 为大于 1 的正整数，$p^2-4q<0$.

第三步，求出各部分分式的不定积分.

综上分析，求有理函数的积分，关键在于如何将真分式分解成部分分式之和，对于这一点，可以通过具体的例子来说明.

【例 1】 将 $R(x)=\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$ 分解成部分分式之和.

解 因为分母 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，所以这个真分式可分解为

$$R(x)=\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \tag{4.1}$$

式中，A、B 是待定常数．下面介绍确定 A、B 的方法.

方法一 将式（4.1）右边通分，等号两边的分子应相等，故

$$x+3=A(x+2)+B(x+1)$$

比较两端 x 的同次幂的系数及常数项，有

$$A+B=1,\quad 2A+B=3$$

从中可解得 $A=2$、$B=-1$.

于是

$$R(x)=\frac{x+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

方法二 在式（4.1）两边同乘$(x+1)$，得

$$R(x)(x+1)=\frac{x+3}{x+2}=A+\frac{B}{x+2}(x+1)$$

令 $x\to-1$，得

$$A=\lim_{x\to-1}[R(x)(x+1)]=\lim_{x\to-1}\frac{x+3}{x+2}=2$$

类似地，可得

$$B=\lim_{x\to-2}[R(x)(x+2)]=\lim_{x\to-2}\frac{x+3}{x+1}=-1$$

一般地，如果真分式 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 的分母 $Q(x)$中含有单重因子$(x-a)$，则 $R(x)$分解后含部分分式$\dfrac{A}{x-a}$，且

$$A=\lim_{x\to a}[R(x)(x-a)] \tag{4.2}$$

【例 2】 将 $R(x)=\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 分解成部分分式之和.

解 这个真分式可分解为

$$R(x)=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2} \tag{4.3}$$

式中，A、B_1 和 B_2 是待定常数.

注意： 分母 $x(x-1)^2$ 中含有二重因子 $(x-1)^2$，部分分式相应地有两项，一项的分母为

$(x-1)^2$，另一项的分母为$(x-1)$，而分子均为常数.

由式（4.2），得

$$A=\lim_{x\to 0}[R(x)x]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)^2}=1$$

把 A=1 代入式（4.3），移项化简得

$$\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}=\frac{1}{x(x-1)^2}-\frac{1}{x}=\frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{-x+1+1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

即 $B_1=-1$，$B_2=1$．于是 $R(x)=\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

【例 3】将 $R(x)=\dfrac{x+4}{x^3+2x-3}$ 分解成部分分式之和.

解　因为 $x^3+2x-3=(x-1)(x^2+x+3)$，x^2+x+3 是二次质因式，所以这个真分式可分解为

$$R(x)=\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+x+3} \tag{4.4}$$

式中，A、M 和 N 是待定常数.

注意：式（4.4）等号右侧第二项的分母是二次质因式，这时分子应为一次多项式.

由式（4.2），得

$$A=\lim_{x\to 1}[R(x)(x-1)]=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x^2+x+3}=1$$

为确定 N，把 A=1 代入式（4.4），令 x=0，得

$$-\frac{4}{3}=-1+\frac{N}{3}$$

解得 $N=-1$．再把 $A=1$、$N=-1$ 代入式（4.4），令 $x=-1$，得

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{-M-1}{3}$$

解得 $M=-1$．于是

$$R(x)=\frac{x+4}{(x-1)(x^2+x+3)}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}$$

【例 4】求 $\displaystyle\int\frac{x^3+5x^2+9x+7}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

解　被积函数是假分式，用多项式的除法把它化为 $x+2+\dfrac{x+3}{x^2+3x+2}$，由例 1 知

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

所以

$$\int\frac{x^3+5x^2+9x+7}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int\left(x+2+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x+1|-\ln|x+2|+C$$

【例 5】求 $\int \frac{x+4}{x^3+2x-3}\mathrm{d}x$.

解 由例 3 知

$$\frac{x+4}{x^3+2x-3}=\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{(x^2+x+3)}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^3+2x-3}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+3}\right)\mathrm{d}x\\&=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+3}-\frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+3}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x^2+x+3|-\frac{1}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C\end{aligned}$$

上面介绍了求有理函数积分的一般方法，但对于某些有理函数的积分，解题时应根据被积函数的特点，尽量选择较简便的方法.

【例 6】求 $\int \frac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)^2}\mathrm{d}x&=\int \frac{(x^2+1)^2-x^2}{x(x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)^2}\right]\mathrm{d}x\\&=\ln|x|+\frac{1}{2(x^2+1)}+C\end{aligned}$$

2．三角函数有理式的积分

三角函数有理式，是指由三角函数和常数经过有限次四则运算所构成的函数．由于全部三角函数都是 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理式，所以三角函数有理式可化为 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理式.

做变量代换 $\tan\frac{x}{2}=u$，于是

$$x=2\arctan u，\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2}$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

从而 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理式可化为 u 的有理函数．因此，三角函数有理式的积分均可化为有理函数的积分．代换 $\tan\frac{x}{2}=u$，俗称“万能代换”.

【例 7】求 $\int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$.

解　设 $\tan\dfrac{x}{2}=u$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$．代入原式得

$$\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\dfrac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\ln|u|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

不难验证，这个结果与公式 $\int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$ 是一致的.

【例 8】求 $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x$.

解　设 $\tan\dfrac{x}{2}=u$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\tan x=\dfrac{2u}{1-u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$．于是

$$\int\frac{1}{\sin x+\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\dfrac{2u}{1+u^2}+\dfrac{2u}{1-u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{(1+u^2)(1-u^2)}{2u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u}-u\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left(\ln|u|-\frac{u^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C$$

【例 9】求 $\displaystyle\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x$.

解　设 $\tan\dfrac{x}{2}=u$，则 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，$\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$．于是

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\left(2+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)\cdot\dfrac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{1+u^2}{u(3+u^2)}\mathrm{d}u$$

因为 $\dfrac{1+u^2}{u(3+u^2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{u}+\dfrac{\frac{2}{3}u}{3+u^2}$，所以

$$\int\frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{2u}{3+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{3}(\ln|u|+\ln|3+u^2|)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\left(3+\tan^2\frac{x}{2}\right)\right|+C$$

万能代换可以将三角函数有理式的积分化为有理函数的积分，但是对于某些特殊的三角函数有理式的积分，可采用更简便的方法，例如：

$$\int\frac{\sin x}{a+\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{a+\cos x}\mathrm{d}(a+\cos x)=-\ln|a+\cos x|+C$$

本 章 小 结

本章讲述了不定积分的概念、性质和求不定积分的基本方法，求不定积分是求导的逆运算，但它要比求导困难得多．给一个函数，对求导来说，只要按求导法则和求导公式就能求出；而它的不定积分，即使被积函数并不复杂，要求出结果也不是轻而易举的事．例如$\int x^3\ln^3 x\mathrm{d}x$，要反复三次用分部积分法才能得出结果．更有甚者，有些被积函数很简单的积分，如$\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，$\int \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$等，虽然它们肯定是存在的，但可以证明它们都不能用初等函数表示．

因此必须分清，原函数存在是一回事，原函数能否用初等函数表示又是另一回事，如果初等函数$f(x)$的原函数不是初等函数，则称$\int f(x)\mathrm{d}x$不能表示为有限形式．

例如，求解$\int \frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$、$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$等．

本章重点是积分法，求不定积分熟练的程度不仅影响定积分的计算和应用，而且还会影响后续多元函数积分的计算，以及微分方程的求解，因此，要加倍努力，学好这一章．

首先要把积分公式牢记于心，掌握积分的三种方法．同一个积分，求解的方法往往不仅一种，积分结果的外形也不一定相同．例如，求解$\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x$．

① $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int 2\sin x\,\mathrm{d}\sin x=\sin x^2+C_1$．

② $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-\int 2\cos x\,\mathrm{d}\cos x=-\cos^2 x+C_2$．

③ $\int 2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int \sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_3$．

三种结果都是正确的，至于哪种方法好，就要看谁用的时间最少，方法最简便．

例如，求解$\int \frac{x^4}{1+x^5}\mathrm{d}x$．

如果用有理函数积分法是非常麻烦的．

如果用第一换元法（凑微分法）可立即得出结果：

$$\int \frac{x^4}{1+x^5}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int \frac{1}{1+x^5}\mathrm{d}\left(1+x^5\right)=\frac{1}{5}\ln\left|1+x^5\right|+C$$

如果想扩展知识面，请再记住下面一些微分形式：

$$(1+\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\ln x)$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$(\sin x+x\cos x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\sin x)$$

$$(\cos x-x\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(x\cos x)$$

$$\left(1\pm\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(x\mp\frac{1}{x}\right)$$

例如，$\int \frac{1+\ln x}{\sqrt{1+2x\ln x}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1+2x\ln x}}\mathrm{d}(x\ln x)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+2x\ln x}}\mathrm{d}(1+2x\ln x)=\sqrt{1+2x\ln x}+C$$

以后遇到下面这种积分时，即 $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$，$a$、$b$、$a_1$、$b_1$ 为已知常数，可将被积函数的分子写成下列形式：

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)+B(a\sin x+b\cos x)'$$

即
$$a_1\sin x+b_1\cos x=(Aa-Bb)\sin x+(Ab+Ba)\cos x$$

于是有 $\begin{cases}Aa-Bb=a_1\\Ab+Ba=b_1\end{cases}$，解出 A、B．

$$\begin{aligned}\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{A(a\sin x+b\cos x)+B(a\sin x+b\cos x)'}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int A\mathrm{d}x+B\int\frac{1}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)\\&=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C\end{aligned}$$

例如，求 $\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$．

解　不必记公式，只需记住此法．

令分子 $\sin x=A(2\sin x+\cos x)+B(2\sin x+\cos x)'$，即

$$\sin x=(2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x$$

$$\begin{cases}2A-B=1\\2A+B=0\end{cases}\Rightarrow A=\frac{1}{4},\quad B=-\frac{1}{2}$$

于是
$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{4}(2\sin x+\cos x)-\frac{1}{2}(2\sin x+\cos x)'}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\ln|2\sin x+\cos x|+C\end{aligned}$$

虽然不定积分的技巧很高，但也都是有法可循的．

例如，求解 $I=\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$，最麻烦的当属 $\arctan x$，因此可设 $t=\arctan x$，则 $x=\tan t$，$\mathrm{d}x=\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{t}{\tan^2 t\sec^2 t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int t\cot^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\int t(\csc^2 t-1)\mathrm{d}t=\int t\csc^2 t\,\mathrm{d}t-\int t\,\mathrm{d}t\\&=-\int t\,\mathrm{d}\cot t-\frac{1}{2}t^2=-t\cot t+\int\cot t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}t^2\\&=-t\cot t+\ln|\sin t|-\frac{1}{2}t^2+C\\&=-\frac{\arctan x}{x}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C\end{aligned}$$

如果被积函数中有反三角函数出现，不妨做相应的三角变换，如果被积函数中有较难的函

数，则可将此函数设为t.

例如，求$I=\int\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2\mathrm{d}x$.

设$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=t$，即$\sqrt{1+x^2}+x=\mathrm{e}^t$，$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\sqrt{x^2+1}-x=\mathrm{e}^{-t}$.

从而$x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$，代入得

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int t^2\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}\int t^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)=\frac{1}{2}\left[t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t^2\right]\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int t\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-\int t\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-t\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)+\int\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t^2\left(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}\right)-t\left(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}\right)+\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}+C\\
&=x\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]^2-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x+C
\end{aligned}$$

当遇到一个有理函数积分时，最一般的方法往往也是最笨拙的方法.

例如，求解$I=\int\dfrac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$.

如果令$\dfrac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x^4}+\dfrac{Ex+F}{1+x^2}$，则要确定 6 个系数，很麻烦.

遇到这种情况，即当分母次数远远高于分子次数时，可做倒代换，即令$x=\dfrac{1}{t}$，$\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$，则有

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{1}{x^4\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{t^4}{1+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int\frac{t^4}{t^2+1}\mathrm{d}t\\
&=-\int\frac{t^4-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int\left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C\\
&=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C
\end{aligned}$$

例如，求解$I=\int\dfrac{(x+1)}{x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}x$.

一看此题，有种无从下手的感觉，因为被积函数中最难处理的是$x\mathrm{e}^x$，如果将它设成t，即$x\mathrm{e}^x=t$，根本解不出x来，这时就要试验一下$\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^x\right)$.

$$\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^x\right)=\left(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(x+1)\mathrm{d}x$$

因此立即想到一个技巧——乘一项，除以一项．于是

$$I=\int\frac{x+1}{x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{\mathrm{e}^x x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x\mathrm{e}^x\left(1+x\mathrm{e}^x\right)}\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^x\right)$$

$$\overset{x\mathrm{e}^x=t}{=}\int\frac{1}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln|t|-\ln|1+t|+C$$

$$=\ln\left|x\mathrm{e}^x\right|-\ln\left|1+x\mathrm{e}^x\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x\mathrm{e}^x}\right|+C$$

在实际工作中常利用现成的积分来计算不定积分．

复 习 题 4

一、填空题

1．设 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\mathrm{e}^x+C$，则 $\int xf\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=$_________．

2．设 $f'\left(\sin^2 x\right)=\cos^2 x$，则 $f(x)=$_________．

3．设 $\int\frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln\left|x^2+1\right|+\arctan\frac{1}{x}+C$，则 $f(x)=$_________．

4．$\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\left(1+\frac{4}{x}\right)}\mathrm{d}x=$_________．

5．$\int\mathrm{e}^{2x+1}\mathrm{d}x=$_________．

6．已知 $f(x)$ 为 $\sin 2x$ 的原函数，且 $f(0)=\frac{1}{2}$，则 $f(x)=$_________．

7．$\int(1-2x)^2\mathrm{d}x=$_________．

8．$\int f(ax+b)f'(ax+b)\mathrm{d}x=$_________．

9．$\int f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=x^2+C$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$_________．

10．$\int\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\mathrm{d}x=$_________．

11．若 $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\sec\frac{1}{x}+C$，则 $f(x)=$_________．

二、单项选择题

1．$\int\frac{1-\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=$（　　）．

A．$\tan x-\ln|\sec x+\tan x|+C$　　B．$\tan x-\ln|\cos x|+C$

C．$-\sec x-\ln|\sec x+\tan x|+C$　　D．$-\sec x-\ln|\cos x|+C$

2．设$\int f(x+1)\mathrm{d}x=\cos x+C$，则$f(x)=$（　　）.

A．$\sin(x-1)$　　B．$-\sin(x-1)$　　C．$\sin(x+1)$　　D．$-\sin(x+1)$

3．若$\int \dfrac{f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln(x^2+1)+C$，则$f(x)=$（　　）.

A．$\dfrac{x}{2}$　　B．x　　C．$2x$　　D．x^2

4．设$f(x)=\arcsin x$，则$\int f'(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$\arcsin x+C$　　B．$\arccos x+C$　　C．$-x+C$　　D．$x+C$

5．设$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则$\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$-\dfrac{3}{4}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$　　B．$\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+C$

C．$-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$　　D．$\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{(1-x^2)^2}+C$

6．若$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则下式中（　　）是错误的.

A．$\int \dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=F(\sqrt{x})+C$　　B．$\int \dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=-F\left(\dfrac{1}{x}\right)+C$

C．$\int \dfrac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=F(\tan x)+C$　　D．$\int \dfrac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=F(\ln x)+C$

三、计算题

1．计算下列不定积分.

（1）$\int \dfrac{\mathrm{e}^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

（3）设$\int xf(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{2x}+C$，求$\int \dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$；　　（4）$\int x^2\cos x\mathrm{d}x$；

（5）$\int \dfrac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；　　（6）$\int x\sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int \dfrac{x}{1+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；　　（8）$\int \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（9）$\int \dfrac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　（10）$\int x\ln\dfrac{1-x}{1+x}\mathrm{d}x$；

（11）$\int \dfrac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}}\mathrm{d}x$；　　（12）$\int \sin\sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

（13）$\int \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}\mathrm{d}x$；　　（14）$\int \cos\theta\cdot\ln\sin\theta\mathrm{d}\theta$.

2．一个空的水桶，当盛水的高度为x时，水的体积V满足关系式$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\pi(2+x)^2$，求$V$的表达式中当$x=2$时，$V$的值是多少？

第 5 章　定　积　分

本章讨论积分学的另一个基本问题——定积分问题. 定积分理论是从 17 世纪开始出现和发展起来的，人们对几何与力学中某些问题的研究是导致定积分理论出现的主要背景. 尽管其中某些问题早在公元前就被古希腊人研究过，但直到 17 世纪有了牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibnitz）的微分思想后，才使这些问题统一到一起，并且与求不定积分的问题联系起来. 下面先从几何与力学问题出发引进定积分的定义，然后讨论它的性质和计算方法，关于它的应用将在下一章讨论.

5.1　定积分的概念与性质

5.1.1　问题的提出

1．曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负连续，由直线 $x=a,x=b,y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形（见图 5.1）称为曲边梯形.

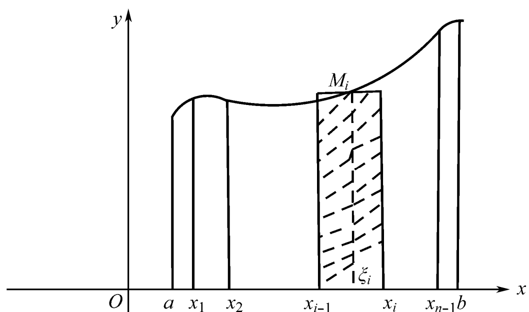


图 5.1

这样的曲边梯形的面积如何计算呢？之前只会算一些规则图形的面积，如矩形、三角形等，用一些小矩形的面积和近似代替曲边梯形的面积是十分自然的想法，于是在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，它们的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$. 经过每个分点作垂直于 x 轴的直线段，把曲边梯形分成 n 个小曲边梯形，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$（$i=1,2,\cdots,n$）上任取一点 ξ_i，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 过点 ξ_i 作 x 轴的垂线，使之交曲边 $y=f(x)$ 于一点 M_i，显然 M_i 的纵坐标为 $f(\xi_i)$. 过点 M_i 作垂直于 y 轴的直线，与直线 $x=x_{i-1}$ 及 $x=x_i$ 相交组成矩形，如图 5.1 中阴影部分所示，这个矩形的底边长为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，高为 $f(\xi_i)$，它的面积为 $f(\xi_i)\Delta x_i$. 从

直观上看，只要底边 Δx_i 很小，这个矩形面积就可以作为同底的小曲边梯形面积的近似值.

于是，n 个矩形面积之和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$ 可以作为曲边梯形面积的一个近似值.

底边长 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i=1,2,\cdots,n$），记 $\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$，当 $\lambda \to 0$ 时，这个和的极限就应该是曲边梯形的面积，即

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

于是曲边梯形的面积就解决了，但是这个极限的计算十分困难，有待于进一步研究更有效的方法.

2．变力所做的功

由中学物理可以知道，一个物体做直线运动，且在运动过程中受到与运动方向一致的常力 F 的作用，如果发生位移为 S，那么 F 所做的功是 $W = FS$.

现在假设力 F 不是常量，而是位移的函数，取 F 的方向作为 x 轴的正向，位移可由 x 表示，而力 $F = F\left(x\right)$，当物体由 $x = a$ 移动到 $x = b$ 时，力 F 所做的功是多少？

解决这个问题的难点是力为变力，随位移 x 的变化而改变．由求曲边梯形的面积可得到启发，将位移分成 n 个小的子区间，如图 5.2 所示，在每个小的子区间，可把力近似地看作一个常力，这个小的子区间力所做的功近似为 $F\left(\xi_i\right)\Delta x_i$，将 n 个小的子区间加起来，即 $\sum\limits_{i=1}^{n} F\left(\xi_i\right)\Delta x_i$，便得到所求功 W 的近似值：

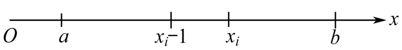


图 5.2

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} F\left(\xi_1\right)\Delta x_i$$

当各小的子区间长度 Δx_i（$i=1,2,\cdots,n$）越小时，上述和式的精度就越高，记 $\lambda = \max\left\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\right\}$，于是

$$W = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} F\left(\xi_i\right)\Delta x_i$$

3．变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，已知速度 $v = v\left(t\right)$ 是时间 t 在间隔 $\left[a\,, b\right]$ 上的连续函数，且 $v\left(t\right) \geqslant 0$，计算在这段时间内物体所经过的路程.

对于等速直线运动有公式：

路程=速度 $\times$ 时间

但现在速度不是一个常量，而是一个时间 t 的函数，因此不能直接用等速直线运动的公式来计算，可在时间间隔 $\left[a\,, b\right]$ 内任意插入若干分点 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$，把 $\left[a\,, b\right]$ 分成 n 个小的时间区间 $\left[t_0, t_1\right], \left[t_1, t_2\right], \cdots, \left[t_{n-1}, t_n\right]$.

各小时间段的长依次为 $\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \cdots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}$，相应地，在各段时间内物体经过的路程依次为 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$，在每一小段的时间间隔内，因为长度很小，所以可以认为在这段时间间隔内速度近似为常量，因此

$$\Delta S_i \approx v\left(\xi_i\right)\Delta t_i \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

于是 n 段路程之和，就是整个变速直线运动路程的近似值：

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

令 $\lambda = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$，得

$$S = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$$

5.1.2　定积分的定义

这里摒弃前面例题中的几何意义和物理意义，找出它们共同的本质与特性加以概括，抽象出定积分的数学定义.

定义 5.1　设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有定义.

（1）在区间 $(a\ \ b)$ 内任意插入 $(n-1)$ 个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个子区间，$[x_{i-1}, x_i]$ 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$（$i = 1, 2, \cdots, n$）；

（2）在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i，求积 $f(\xi_i)\Delta x_i$；

（3）求和 $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$；

（4）记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$；

（5）取极限 $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

如果极限存在，则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是可积的，称极限值为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

式中，$f(x)$ 叫被积函数，$f(x)dx$ 叫被积表达式，x 叫积分变量，$\int_a^b$ 叫定积分号，a 叫积分下限，b 叫积分上限，$[a, b]$ 叫积分区间.

注：（1）当 $f(x) \geqslant 0$ 时，$\int_a^b f(x)\,dx$ 的几何意义就是以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积.

下面讨论定积分 $f(x) \leqslant 0$ 的几何意义，如图 5.3 所示.

此时 $\int_a^b f(x)\,dx$ 应表示上述曲边梯形面积的负值.

因此，任意一个连续函数，其定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 表示的几何意义是其“面积”的代数和，x 轴上方为正，x 轴下方为负.

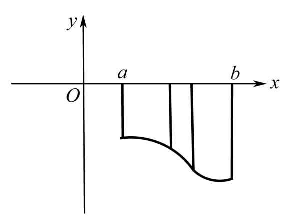


图 5.3

（2）物体以变速 $v = v(t) \geqslant 0$ 做直线运动，从时刻 $t = a$ 到 $t = b$ 时，物体经过的路程 $S = \int_b^a v(t)\,dt$.

（3）$\int_a^a f(x)\,dx = 0$，当上、下限相等时，退缩为一直线段，故面积为 0.

（4）$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$，即定积分与积分变量无关.

（5）$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

（6）当 a、b 是常数时，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是个常数.

对于定积分，有这样一个重要问题：函数 $y=f(x)$ 满足什么条件，上述极限能存在呢？这个问题不做深入讨论，只给出两个充分性定理.

定理 5.1　设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

定理 5.2　设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且最多有有限个第一类间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

5.1.3　定积分的性质

假定各函数都是可积的，如无特别指明，积分上、下限的大小均不加限制.

性质 1　$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）.

性质 2　$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

注：对于任意有限个函数的和、差都是成立的.

性质 3　$\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

只要各式可积，无论 c 在 $[a,b]$ 之内，还是在 $[a,b]$ 之外都成立.

性质 4　如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 1$，则 $\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$.

性质 5　如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\geqslant 0$（$a<b$），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.

推论 5.1　如果在 $[a,b]$ 上，$f(x)\leqslant g(x)$（$a<b$），则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

注：当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 连续时，只要不恒等，则一定是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

推论 5.2　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$（$a<b$）.

性质 6　设 m 与 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)\quad(a<b)$$

性质 7（定积分中值定理）如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b)$$

证　由性质 6 有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

两边除以（$b-a$）得

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M$$

则 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 介于函数 $f(x)$ 的最小值与最大值之间．根据闭区间上连续函数的介值定理可知，至少有一点 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

显然，积分中值公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)\text{，}\quad \xi \in (a,b)$$

不论 $a<b$ 或 $a>b$ 都是成立的．

积分中值公式的几何解释如图 5.4 所示，在区间 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ，使得以区间 $[a,b]$ 为底，以 $f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积，等于同一底而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形面积．

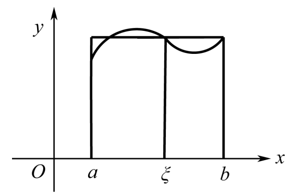


图 5.4

称 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值．

由此可见，一个连续函数在区间上的平均值就是该区间上的积分均值．函数平均值的概念在工程技术中有广泛的用途，如变电流的强度、电动势、气温、气压等往往需要用函数平均值来表示．

【例 1】求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$．

解　$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\sin\xi}{\xi}\cdot 1$，$\xi \in (n,n+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi} = 0$$

【例 2】比较 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$ 的大小．

解　$x\in[0,1]$，$x \geqslant x^2$，而 e^x 是增函数，所以 $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{x^2}$，故 $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$．

【例 3】利用性质 6，估计积分值 $\int_0^2 (x^2+2x+2)\mathrm{d}x$ 所在的范围．

解　设 $f(x)=x^2+2x+2$，$f'(x)=2x+2>0$，$x\in[0,2]$．所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上是单调增加的，有

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$$

即

$$2 \leqslant x^2+2x+2 \leqslant 10$$

因此

$$\int_0^2 2\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 (x^2+2x+2)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 10\mathrm{d}x$$

即

$$4 \leqslant \int_0^2 (x^2+2x+2)\mathrm{d}x \leqslant 20$$

【例 4】求 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$．

解　函数 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 是半径为 a 的上半圆，由定积分的几何意义知，$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$ 是上半圆的面积，因此

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi a^2}{2}$$

【例 5】求 $\displaystyle\int_0^a \sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\mathrm{d}x$．

解　函数 $y=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$ 是上半椭圆，而 $x\in(0,a)$，为 $\dfrac{1}{4}$ 椭圆，但是椭圆面积现在还不会算，将 $y=\sqrt{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}$ 做个等价变形.

把 $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 代入积分中，得

$$\int_0^a\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\cdot\frac{\pi a^2}{4}=\frac{\pi ab}{4}$$

由椭圆的对称性可知，整个椭圆的面积是它的 4 倍，故椭圆面积 $S=\pi ab$.

【例 6】 求 $y=\sqrt{4-x^2}$ 在 $[0,2]$ 上的平均值.

解　由函数平均值的定义可知，其平均值为

$$\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\frac{\pi}{2}$$

【例 7】 根据积分的几何意义，说明下列各式的正确性.

（1）$\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$；

（2）$\int_{-1}^1\left(x^2+5\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1\left(x^2+5\right)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{-1}^1 x^3\mathrm{d}x=0$.

解　（1）由 $y=\sin x$ 的图像（见图 5.5）及积分的几何意义可知:

$$\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$$

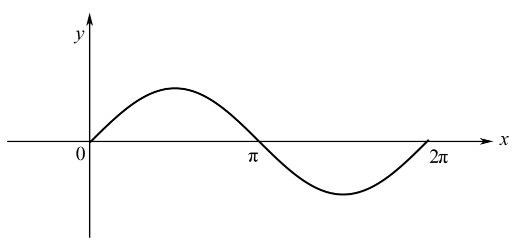


图 5.5

（2）$y=x^2+5$ 是偶函数，其图形关于 y 轴对称，如图 5.6 所示. 所以

$$\int_{-1}^1\left(x^2+5\right)\mathrm{d}x=2\int_0^1\left(x^2+5\right)\mathrm{d}x$$

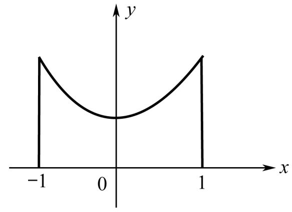


图 5.6

（3）$y=x^3$ 是奇函数，图形关于原点对称，如图 5.7 所示.

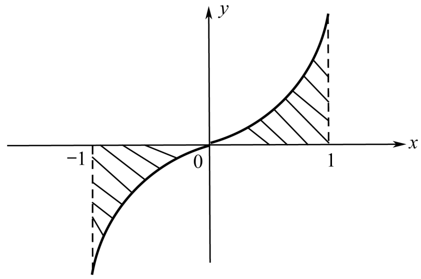


图 5.7

由定积分的几何意义可知：

$$\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{d}x=0$$

由此可知，定积分中的重要公式.

定理 5.3　$f(x)$ 是可积的奇函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=0$.

定理 5.4　$f(x)$ 是可积的偶函数，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

加 油 站

【例 8】 $\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

解　因为 x^2+1 是偶函数，$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，$\left(x^2+1\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是连续的奇函数. 于是

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=0$$

【例 9】 不计算定积分，比较下列积分值的大小.

（1）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x$；

（2）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{0}^{-2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_{0}^{-2}x\mathrm{d}x$.

解　（1）$x\in[1,\mathrm{e}]$，$0\leqslant\ln x\leqslant 1$，所以 $\ln x\geqslant\ln^2 x$，于是有

$$\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x>\int_{1}^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

（2）$x>0$，有 $x>\sin x$，所以

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x<\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}x$$

（3）先看两者的图像，如图 5.8 所示.

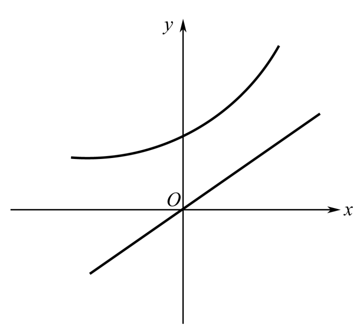


图 5.8

有 $\mathrm{e}^x>x$，则

$$\int_{-2}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x>\int_{-2}^{0}x\mathrm{d}x$$

两边乘以 -1 得

$$\int_0^{-2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x<\int_0^{-2}x\mathrm{d}x$$

【例 10】利用定积分的性质，估计积分的值.

（1）$\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$；（2）$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x$.

解　（1）设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$，求其在 $[0,2]$ 上的最值.

$$f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，$\left\{f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(2)\right\}=\left\{1,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}},\mathrm{e}^2\right\}$，最大值 $M=f(2)=\mathrm{e}^2$，最小值 $m=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$. 所以

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$$

（2）设 $g(x)=x\arctan x$，则 $g'(x)=\arctan x+\frac{x}{1+x^2}>0$，$x\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$，所以 $g(x)$ 是增函数.

最小值 $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$，最大值 $g\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$.

由定积分性质 6 可知:

$$\frac{\sqrt{3}\pi}{18}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\leqslant\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

即 $\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\pi$.

习　题　5.1

一、填空题

1．$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=$__________；

2．$\int_0^1 2x\mathrm{d}x=$__________；

3．$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=$__________；

4．$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=$__________；

5．$\int_{-a}^{a}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\mathrm{d}x=$__________；

6．$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\cos^3 x}{x}\mathrm{d}x=$__________；

7．$\int_{-1}^{1}x\left(\cos x+|x|\right)\mathrm{d}x=$__________；

二、单项选择题

1．下列各式错误的是（　　）．

A．$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$　　B．$\int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x > 0$

C．$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$　　D．$\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathrm{d}x < 0$

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的（　　）条件．

A．充分非必要　B．必要非充分　C．充分必要　D．无关

3．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的（　　）条件．

A．充分非必要　B．必要非充分　C．充分必要　D．无关

4．下列各式错误的是（　　）．

A．$\int_1^3 |2-x|\mathrm{d}x = \int_1^2 (2-x)\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\mathrm{d}x$

B．$\int_1^{\mathrm{e}^2} |\ln x - 1|\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (\ln x - 1)\mathrm{d}x$

C．$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos x\mathrm{d}x$

D．$\int_0^1 |\mathrm{e}^x - 1|\mathrm{d}x = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - 1)\mathrm{d}x$

5．下列各式中正确的是（　　）．

A．$0 < \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\mathrm{d}x < \frac{1}{\mathrm{e}}$　　B．$-\frac{1}{\mathrm{e}} < \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\mathrm{d}x < 0$

C．$0 \leqslant \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{e} - 1$　　D．$1 < \int_1^{\mathrm{e}} (1-\ln x)\mathrm{d}x < \mathrm{e}$

三、计算题

1．不计算积分，比较下列各积分值的大小．

（1）$\int_3^4 \ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_3^4 (\ln x)^2 \mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 x\mathrm{d}x$；　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$；

（5）$\int_1^2 x^4\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$．

2．利用定积分性质，估计下列积分值．

（1）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　（4）$\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$．

3．设 $\int_{-1}^1 3f(x)\,\mathrm{d}x = 18, \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 4, \int_{-1}^3 g(x)\,\mathrm{d}x = 3$．求：

（1）$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{-1}^3 f(x)\mathrm{d}x$；

（3）$\int_{3}^{-1} g(x)\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_{-1}^{3}\frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x.$

5.2　微积分基本定理

上节给出了定积分的定义及性质，但人们最关注的还是定积分的计算．当a、b都是常数时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$就是一个常数，但当b变动时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$应该是一个依赖b的函数了，此时称其为变上限积分．类似地，下限是变量的积分$\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$称为变下限积分，下面先来学习变限积分的性质．

5.2.1　变限积分与原函数

$y=f(x)$在$[a,b]$上可积，$x\in[a,b]$，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就是区间$[a,b]$上的一个变上限函数，记为$\varphi(x)$．

定理 5.5　设$y=f(x)$在$[a,b]$上可积，则$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$[a,b]$上的连续函数．

证　设$x_0\in[a,b]$，有

$$\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)=\int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$$

由于$f(x)$在$[a,b]$上可积，则必有界，即$|f(x)|\leqslant M$，则

$$|\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)|\leqslant M|\Delta x|$$

从而推出$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(x_0+\Delta x)=\varphi(x_0)$．

由x_0的任意性，知$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上连续．

定理 5.6　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$[a,b]$上可导，并且它的导数$\varphi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$．

注：$\varphi'(x)$就是将被积函数中的t转化成x．

证　任给一点$x\in[a,b]$，取一很小的增量Δx，使$x+\Delta x\in[a,b]$，则

$$\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$$

所以$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)$．

这个定理指出一个重要结论：连续函数$f(x)$变上限积分的导数等于$f(x)$，因此$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$就是$f(x)$的一个原函数．

定理 5.7　设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则函数$\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数．

这个定理揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系．

【例 1】设 $\varphi(x)=\int_a^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$.

解　由定理 5.6 知 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

【例 2】设 $F(x)=\int_x^a f(t)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 连续，求 $F'(x)$.

解　$F(x)=-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=-f(x)$

【例 3】设 $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)\mathrm{d}t$，$g(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，求 $F'(x)$.

解　这是一个复合函数，$u=g(x)$ 是一个中间变量，所以

$$\begin{aligned}F'(x)&=F_u'\cdot u_x'=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u f(t)\mathrm{d}t\right]\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\&=f(u)\cdot g'(x)=f\left[g(x)\right]g'(x)\end{aligned}$$

【例 4】设 $F(x)=\int_a^{x^3}\sin t^2\,\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$.

解　$F'(x)=3x^2\sin x^6$

【例 5】设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{\sin x^3}$.

解　这是 $\dfrac{0}{0}$ 型，应用洛必达法则，则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{\sin x^3}&\overset{\sin x\sim x}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\end{aligned}.$$

5.2.2　牛顿–莱布尼茨公式

定理 5.8　如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a) \tag{5.1}$$

证　已知 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，而 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，于是 $F(x)-\varphi(x)=C$.

令 $x=a$，得 $F(a)-\varphi(a)=C$.

而 $\varphi(a)=\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=0$，因此 $F(a)=C$，即 $F(x)-\varphi(x)=F(a)$，则 $\varphi(x)=F(x)-F(a)$，即

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

令 $x=b$，得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

为方便起见，可把 $F(a)-F(a)$ 记作 $F(x)\Big|_a^b$.

公式（5.1）叫作牛顿–莱布尼茨公式，这个公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系，这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法，大大简化了定积分

的计算过程．通常把公式（5.1）叫作微积分基本公式．

下面举几个应用公式（5.1）来计算定积分的简单例子．

【例 6】计算 $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$.

解　由于 $\dfrac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数，所以根据牛顿–莱布尼茨公式，有

$$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

【例 7】计算 $\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \dfrac{1}{x} \mathrm{d}x$.

解　$x<0$ ，$\ln|x|$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的一个原函数，所以

$$\int_{-\mathrm{e}}^{-1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{-\mathrm{e}}^{-1} = \ln 1 - \ln \mathrm{e} = -1$$

【例 8】计算 $\int_{-1}^{3} |x-2| \mathrm{d}x$.

解　遇到被积函数带有绝对值符号的，应该分段积分将绝对值符号去掉，使绝对值符号内的式子为 0，得出的变量值为分段点，即

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$\int_{-1}^{3} |x-2| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (2-x) \mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (x-2) \mathrm{d}x = 2x\bigg|_{-1}^{2} - \frac{1}{2}x^2\bigg|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}x^2\bigg|_{2}^{3} - 2x\bigg|_{2}^{3} = 5$$

应该指出，牛顿–莱布尼茨公式适用的条件是被积函数在积分区间 $[a,b]$ 上连续，同时定积分存在定理又告诉我们在 $[a,b]$ 上除了有限个第一类间断点外，处处连续的函数也是可积的，因此遇到分段连续函数的积分时应该如何处理在下面说明．

把间断点作为分点，设间断点为 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ ，将区间 $[a,b]$ 分成子区间 $[a,t_1],[t_1,t_2],\cdots,[t_n,b]$．对每个子区间，必要时将被积函数左、右端点的右极限与左极限值作为该点处的函数值，使之在子区间上连续，可以证明，补充定义后的函数在各子区间上的积分值之和就是原来函数在 $[a,b]$ 上的积分值，即

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^{t_1} f(x) \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} f(x) \mathrm{d}x + \cdots + \int_{t_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x$$

【例 9】设 $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 4, & 1<x \leqslant 2 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x$.

解　把区间 $[0,2]$ 分成 $[0,1]$ 与 $[1,2]$ 两个子区间，并在子区间 $[1,2]$ 上规定 $x=1$ 时，$f(1)=4$ ，从而

$$\int_0^2 f(x) \mathrm{d}x = \int_0^1 3x^2 \mathrm{d}x + \int_1^2 4 \mathrm{d}x = x^3\Big|_0^1 + 4 = 5$$

加 油 站

【例 10】设 $f(x)=\int_{x^2}^{x} \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ ，$x>0$ ，求 $f'(x)$ 与 $f'(1)$.

解　这是一个上、下限都是变量的函数，插入一个分点，如 $x=1$ ，则

$$f(x)=\int_{x^2}^{1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=-\int_1^{x^2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$$

两边对 x 求导有

$$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^x$$
$$f'(1)=-\mathrm{e}$$

【例 11】 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数为 $\arctan x$，所以

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{7\pi}{12}$$

【例 12】 由于 $\frac{1}{3-x}$ 是 $\frac{1}{(x-3)^2}$ 的一个原函数，根据牛顿-莱布尼茨公式有 $\int_2^4\frac{1}{(x-3)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3-x}\Big|_2^4=-1-1=-2$，这个答案对吗？为什么？

解　这是不对的，因为被积函数 $\frac{1}{(x-3)^2}$ 在 $x=3$ 是间断的，所以是不对的.

【例 13】 由方程 $\int_0^y\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^x\sin t\,\mathrm{d}t=0$ 确定的函数为 $y=y(x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　这是隐函数求导，两边对 x 求导有

$$\mathrm{e}^y y'_x+\sin x=0$$

所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\sin x}{\mathrm{e}^y}$.

【例 14】 已知 $x=\int_0^t u^2\,\mathrm{d}u$， $y=\int_1^t\ln u\,\mathrm{d}u$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　这是参数方程确定的函数:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left(\int_1^t\ln u\,\mathrm{d}u\right)'_t}{\left(\int_0^t u^2\,\mathrm{d}u\right)'_t}=\frac{\ln t}{t^2}.$$

【例 15】 设 $f(x)$ 连续，且满足 $f(x)=x^2+\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$ 及 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解　设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=C$，则 $f(x)=x^2+C$，则

$$C=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x^2+C)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2+2C=\frac{8}{3}+2C$$

解得 $C=-\frac{8}{3}$，则

$$f(x)=x^2-\frac{8}{3}$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-\frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1-\frac{8}{3}=-\frac{7}{3}$$

【例 16】 设 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-1$，求 $f(x)$ 及 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解　设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=C$，则 $f(x)=Cx-1$，则

$$C=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(Cx-1)\mathrm{d}x=\frac{C}{2}x^2\Big|_0^1-1=\frac{C}{2}-1$$

解得 $C=-2$，所以 $f(x)=-2x-1,\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$.

【例 17】 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t}{x^2}$，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

解　因为被积函数中仍有变量 x，不能直接用上限为变量的积分函数求导公式.

$$\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}\end{aligned}$$

注意： 千万不要犯下面这样的错误.

$$\left[\int_0^x f(t)(x-t)\mathrm{d}t\right]_x'=f(x)(x-x)=0$$

【例 18】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\leqslant 0$，函数 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，证明 $F'(x)\leqslant 0$，$x\in(a,b)$.

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $F(x)$ 在 (a,b) 内可导.

$$F'(x)=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{(x-a)^2}$$

因为 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$，所以

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x-a}-\frac{f(\xi)}{x-a}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}\quad(0<\xi<x)$$

又由 $f'(x)\leqslant 0$，知 $f(x)$ 在 (a,b) 内是不增的，因而当 $x>\xi$ 时，$f(x)\leqslant f(\xi)$，故当 $x\in(a,b)$ 时，有 $F'(x)\leqslant 0$.

【例 19】 已知 $f(x)$ 连续且满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^3+x-x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解　因为 $f(x)$ 连续，所以 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，方程两边对 x 求导，有

$$f(x)=3x^2+1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = C$，则 $f(x)=3x^2+1-C$，有

$$C=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(3x^2+1-C)\mathrm{d}x=x^3\Big|_0^1+x\Big|_0^1-C$$
$$=1+1-C$$

解得$C=1$，所以 $f(x)=3x^2$.

【例 20】求定积分$\int_{-1}^{1}\frac{x^4+9x^3+x^2+2x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 此题看似复杂，但由于积分区间是对称的，所以可利用奇函数在对称区间上的积分为0的公式来化简：

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^4+9x^3+x^2+2x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x^4+x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{9x^3+2x}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+0+\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}+\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{\pi}{2}$$

【例 21】已知 $f(x)$ 可导且满足$\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x f(x)+x^2+x+1$，求 $f(x)$.

解 这是一个函数积分方程，对方程两边关于x求导，得

$$\mathrm{e}^x f(x)=\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)+2x+1$$

所以 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}$.

两边积分，有

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int -(2x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

而

$$\int -(2x+1)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=3\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}+C$$

所以

$$f(x)=3\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}+C$$

常数C如何确定呢?

对这类积分方程问题，当原方程中积分限中的常数为a时，就令$x=a$，此题$a=0$，则令$x=0$，先代入原方程，得$0=f(0)+1$，所以 $f(0)=-1$.

再代入 $f(x)=3\mathrm{e}^{-x}+2x\mathrm{e}^{-x}+C$ 中，得 $f(0)=3+C$，所以$C=-4$.

于是 $f(x)=(3+2x)\mathrm{e}^{-x}-4$.

【例 22】求定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|\mathrm{d}x$.

解 $\frac{1}{2}-\sin x=0$，得 $x=\frac{\pi}{6}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2}-\sin x\right|\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\sin x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{12}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{6}$$

$$=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$$

【例 23】当 x 为何值时函数 $f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 有极值？

解　$f'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$．当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$．所以 $x=0$ 是极小值点，极小值 $f(0)=0$．

【例 24】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$．

解　这是 $\dfrac{0}{0}$ 型，应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_1^{\cos x}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{-1}{2\mathrm{e}}$$

【例 25】设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0,1)\\ x, & x\in[1,2]\end{cases}$．求 $\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[0,2]$ 上的表达式，并讨论 $\varphi(x)$ 在 $[0,2]$ 内的连续性．

解　$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^3, & x<1\\ \int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\varphi(1)=\dfrac{1}{3}$，于是 $\varphi(x)$ 在 $[0,2]$ 上是处处连续的．

【例 26】设 $F(x)=\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，求 $F'(0)$．

解　$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{x}{1}}=1$$

习　题　5.2

一、填空题

1．设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$__________；

2．设 $f(x)=\int_x^0 t^3\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$__________；

3．设 $f(x)=\int_a^{x^2} t\cos t^2\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$__________；

4．设 $f(x)=\int_{-x}^{x^2}\sin t^2\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=$__________；

5．设 $F(x)=\int_0^x (x-1)f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=$__________；

6．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=$__________；

7．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}=$__________；

8．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\,\mathrm{d}t}=$__________；

9．$\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=$__________；

10．$\int_{-1}^{1}\left(2x+|x|+1\right)^2\mathrm{d}x=$__________.

二、单项选择题

1．设 $f(x)$、$\varphi(x)$ 都是 $\mathbf{R}$ 内的连续函数，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ 的（　　）.

A．低阶无穷小　　B．高阶无穷小

C．等价无穷小　　D．同阶但非等价无穷小

2．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} t^2\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t=$（　　）.

A．$x^2\sqrt{1+x}$　　B．$x^2\sqrt{1+x^2}$　　C．$x^4\sqrt{1+x^2}$　　D．$2x^5\sqrt{1+x^2}$

3．设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x a\sin^3 t\,\mathrm{d}t}{x^4}=1$，则 $a=$（　　）.

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

4．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{\int_0^x\left(\mathrm{e}^t-1\right)\mathrm{d}t}{x^2}, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A．连续　　B．极限存在

C．左极限存在，右极限存在　　D．左极限存在，但右极限不存在

三、计算题

1．计算 $\int_a^b \left|2x-(a+b)\right|\mathrm{d}x$.

2．设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3．计算下列各积分.

（1）$\int_1^2\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_4^9\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^1\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$；　（4）$\int_2^3\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_0^1 \tan^2\theta \mathrm{d}\theta$；　　（6）设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leqslant 1 \\ \frac{1}{2}x^2, & x>1 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

4．求极限.

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\ln(1+x^4)}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \arctan t^2 \mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)x}$.

5．设 $k\in\mathbf{N}^+$，证明下列各题.

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=0$；　（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\mathrm{d}x=0$；　（3）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x=\pi$；　（4）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x=\pi$.

6．设 k、$l\in\mathbf{N}^+$ 且 $k\neq l$，证明下列各题.

（1）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos lx\mathrm{d}x=0$；（2）$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\mathrm{d}x=0$；（3）$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\mathrm{d}x=0$.

7．设 $f(x)=x^2-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 且 $a\neq -1$ 为常数，证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{a^3}{3(a+1)}$.

8．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，且 $f(x)>0$，证明函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 在 $(0,+\infty)$ 内为单调增加函数.

5.3　定积分的换元法与分部积分法

由牛顿-莱布尼茨公式可知，计算定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的简便方法是把它转化为求不定积分，在上一章中，用换元法和分部积分法可以求出一部分函数的原函数，即不定积分．因此，在一定条件下，可以用换元法与分部积分法来计算定积分．下面就来介绍定积分的这两种方法.

5.3.1　定积分的换元法

与不定积分的两种换元法相对应，定积分也有两种换元法.

定理 5.9　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下列条件:

（1）$\varphi(t)$ 是定义在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的单调连续函数;

（2）$\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续;

（3）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$.

则有换元积分公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t \tag{5.2}$$

证　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

又因为 $\{F[\varphi(t)]\}'_t=F'[\varphi(t)]\varphi'(t)=f[\varphi(t)]\varphi'(t)$，所以 $F[\varphi(t)]$ 是 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a)$$

从而有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

注：（1）利用代换 $x=\varphi(t)$ 进行换元时，积分限要相应地变换，即换元时千万不要忘了换积分限．求出 $f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)$ 的原函数后，直接按牛顿–莱布尼茨公式计算出定积分值，而不必将换元后的变量再代回原变量，这与不定积分的换元法是不同的，也是比不定积分省事的地方．

（2）与不定积分的换元法一样，定积分换元公式（5.2）也可以有两种理解，从右到左使用公式（5.2）相当于不定积分的第一换元法；从左到右使用公式（5.2）相当于不定积分的第二换元法．特别需要指出的是 $\int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\mathrm{d}\varphi(x)$，当设 $\varphi(x)=u$ 时，一定要换积分限，如果不设 $\varphi(x)=u$，就不用换积分限.

例如，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}(\cos x) = -\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(0-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

（3）在定积分 $f(x)$ 中的 $\mathrm{d}x$，本来是整个定积分记号中不可分割的一部分，但由定理 5.9 可知，在一定条件下，它确实可作为微分来对待，这就是说，应用换元公式时，如果把 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$，则 $\mathrm{d}x$ 就换成 $\varphi'(t)\mathrm{d}t$，这正好是 $x=\varphi(t)$ 的微分 $\mathrm{d}x$.

定积分的换元与不定积分的换元是一致的，不定积分怎么换，定积分就怎么换.

【例 1】 计算 $\int_0^1 (2x+1)^2\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 (2x+1)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x+1)^2\mathrm{d}(2x+1) = \frac{1}{6}(2x+1)^3\Big|_0^1 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$

【例 2】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x\mathrm{d}(4x) = -\frac{1}{4}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{2}$

【例 3】 计算 $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

解　$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}(\ln x+1) = 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{\mathrm{e}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

【例 4】 计算 $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin x^2\,\mathrm{d}\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}\cos x^2\Big|_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}$

【例 5】 计算 $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$.

解　设 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$，　$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$，因此有

$$\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{2t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^2\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(2-\arctan t\Big|_0^2\right) = 2(2-\arctan 2)$$

【例 6】计算$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx$.

解　设$\sqrt{e^x-1}=t$，则$x=\ln\left(1+t^2\right)$，$dx=\dfrac{2t}{1+t^2}dt$，因此有

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx&=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt\\&=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=2\left(t-\arctan t\right)\Big|_0^1\\&=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=2-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

【例 7】计算$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

解　设$x=\sin t$，则$\sqrt{1-x^2}=\cos t$，$dx=\cos t\,dt$，因此有

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\csc^2 t-1\right)dt=-\cot t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

【例 8】计算$\int_1^2\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

解　设$x=\sec t$，则$\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$dx=\sec t\tan t\,dt$，因此有

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2 t}{\sec t}\sec t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sec^2 t-1\right)dt=\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

【例 9】设$f\left(x\right)$是以T（$T>0$）为周期的连续函数，试证明对任意常数a，有：

（1）$\int_a^{a+T}f\left(x\right)dx=\int_0^T f\left(x\right)dx$；

（2）$\int_a^{a+nT}f\left(x\right)dx=n\int_0^T f\left(x\right)dx$（$n\in\mathbf{N}$）.

证　（1）证法 1：设$F\left(a\right)=\int_a^{a+T}f\left(x\right)dx$.

因为$f\left(x\right)$是连续函数且$f\left(a\right)=f\left(a+T\right)$，$F\left(a\right)$是可导的.

$$F'\left(a\right)=\left[\int_a^0 f\left(x\right)dx+\int_0^{a+T}f\left(x\right)dx\right]'=-f\left(a\right)+f\left(a+T\right)=0$$

所以$F\left(a\right)=$常数$=F\left(0\right)$，于是$\int_a^{a+T}f\left(x\right)dx=\int_0^T f\left(x\right)dx$.

证法 2:

$$\int_a^{a+T}f\left(x\right)dx=\int_a^0 f\left(x\right)dx+\int_0^T f\left(x\right)dx+\int_T^{a+T}f\left(x\right)dx$$

而$\int_T^{a+T}f\left(x\right)dx\xlongequal{x=t+T}\int_0^a f\left(t+T\right)d\left(t+T\right)=\int_0^a f\left(t\right)dt=-\int_a^0 f\left(x\right)dx$，所以

$$\int_a^{a+T}f\left(x\right)dx=\int_0^T f\left(x\right)dx$$

如$\int_0^{2\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x=0$.

（2）$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a+kT}^{a+kT+T}f(x)\mathrm{d}x$

由（1）知$\int_{a+kT}^{a+kT+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$，因此$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$.

【例 10】设$f(x)$是可积的奇函数（偶函数），证明：$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$一定是偶（奇）函数.

证　设$f(x)$是可积偶函数，需要证$F(-x)=-F(x)$.

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\overset{t=-u}{=\!=\!=}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$$

同理可证$f(x)$为奇函数时，$F(-x)=F(x)$，所以当$f(x)$为奇（偶）函数时，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶（奇）函数.

【例 11】设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，证明：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x$.

并由此计算定积分$I_n=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n}x}{\sin^{2n}x+\cos^{2n}x}\mathrm{d}x$（$n$为正整数）.

证　（1）先考虑什么样的变换能把$\sin x$变成$\cos x$，其次是这样的变换积分限仍然与原积分限相同（上、下限可以变换），满足这样条件的变换是$x=\frac{\pi}{2}-t$，$\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，因此

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=}-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\mathrm{d}x$$

（2）先考虑把$\sin x$变成$\sin x$的变换，然后再考虑积分限问题，满足这样条件的变换是$x=\pi-t$，因此

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x&\overset{x=\pi-t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{2}}^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}(\pi-t)\\&=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}tf(\sin t)\mathrm{d}t\\&=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

移项整理:

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x&\overset{x=\pi-t}{=\!=\!=}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f[\sin(\pi-t)]\mathrm{d}(\pi-t)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

所以$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$，于是$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x$.

注意到$\cos^2 x = 1-\sin^2 x$，因此$\dfrac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}$是$f(\sin x)$型的函数，由（2）可知

$$I_n = \int_0^{\pi}\frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x$$

又由（1）可知

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x$$

因此

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}{\sin^{2n} x+\cos^{2n} x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

【例 12】若$f(x)$在$[-a,a]$上连续，证明$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

证 $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x$

对$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$，令$x=-t$，则

$$\int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{0} f(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_0^{a} f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^{a} f(-x)\mathrm{d}x$$

所以$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a}[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x$.

特别是:

① 当$f(x)$为奇函数时，有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{a}[f(x)-f(x)]\mathrm{d}x = 0$$

② 当$f(x)$为偶函数时，有

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

这与定理 5.3 和定理 5.4 是一致的.

5.3.2　定积分的分部积分法

与不定积分的分部积分法类似，定积分也有分部积分法.

定理 5.10　设$u'(x)$和$v'(x)$在$[a,b]$上连续，则有

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x$$

证　由$(uv)' = u'v+uv'$可得

$$\int_a^b (u'v+uv')\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'\,\mathrm{d}x$$

即

$$\int_a^b u'v\,\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b$$

移项即得

$$\int_a^b uv'\,\mathrm{d}x = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,\mathrm{d}x \quad \text{或简记为} \int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

同学们在解定积分题时，应先想到解不定积分时用什么方法，若不定积分用换元法，则定积分就用换元法；若不定积分用分部积分法，则定积分就用分部积分法，但是要记住：**换元时别忘了换积分限，分部时别忘了带积分限！**

【例 13】计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解　这是 $\int$ 幂函数×三角函数 $\mathrm{d}x$ ，用分部积分法.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}(\cos x) = -\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\left(-\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

【例 14】计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x$.

解　这是 $\int$ 对数函数 $\mathrm{d}x$ ，用分部积分法.

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} x\,\mathrm{d}(\ln x) = x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e}\mathrm{d}x = \frac{2}{e}$$

【例 15】计算 $\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.

解　这是 $\int$ 幂函数×对数函数 $\mathrm{d}x$ ，用分部积分法.

$$\int_0^1 x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+x^2\right)\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(1+x^2\right)\mathrm{d}\ln\left(1+x^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\ln 2 - \int_0^1 2x\,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - x^2\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 1)$$

【例 16】计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\mathrm{d}x$.

解　这是 $\int$ 指数函数×三角函数 $\mathrm{d}x$ ，用分部积分法.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}(e^x)$$

$$= e^x \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\,\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(e^x)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \left(0 - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\mathrm{d}x$$

移项整理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right)$$

【例 17】计算$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx$.

解　设$\sqrt{2x-1}=t$，则$x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$dx=t\,dt$，因此有

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{\sqrt{2x-1}} dx=\int_0^1 e^t t\,dt=\int_0^1 t\,d(e^t)=t\,e^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\,dt \quad = e-e^t\Big|_0^1=1$$

【例 18】设$f(2x-1)=xe^x$，求$\int_3^5 f(x)dx$.

解　第一种：$\int_3^5 f(x)dx \xlongequal{x=2t-1} 2\int_2^3 f(2t-1)\,dt=\ 2\int_2^3 te^t\,dt=2\left(t\,e^t\Big|_2^3-\int_2^3 e^t\,dt\right)=4e^3-2e^2$

第二种：令$t=2x-1$，则$x=\dfrac{t+1}{2}$，$f(t)=\left(\dfrac{t+1}{2}\right)e^{\frac{t+1}{2}}$，因此有

$$\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\left(\frac{x+1}{2}\right)e^{\frac{x+1}{2}}dx=\int_3^5 te^t dt$$

$$=t\,e^t\Big|_3^5-\int_3^5 e^t\,dt$$

$$=5e^3-3e^2-e^t\Big|_3^5$$

$$=4e^3-2e^2$$

注：第二种相对烦琐一些.

【例 19】已知$b>0$，$\int_1^b \ln x dx=1$，求b的值.

解　$\int_1^b \ln x dx=x\ln x\Big|_1^b-\int_1^b x\,d(\ln x)=b\ln b-\int_1^b dx=b\ln b-b+1=1$

得$b(\ln b-1)=0$，由于$b>0$，所以$\ln b=1$，$b=e$.

【例 20】设$f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{x}$，求$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx$.

解　$f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x\,d\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$=\frac{x\cos x-\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-4}{\pi}-\frac{1}{2}$$

【例 21】设曲线$y=\int_0^x te^{-t}\,dt$，求其拐点.

解　$y'=xe^{-x}$，$y''=e^{-x}(1-x)$，令$y''=0$，得$x=1$.

当$x<1$时，$y''>0$；当$x>1$时，$y''<0$．故点$(1,y(1))$是曲线的拐点.

$$y(1)=\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})$$
$$=-\left(t\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)=-\left(\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1\right)$$
$$=1-\frac{2}{\mathrm{e}}$$

所以拐点为$\left(1,1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)$.

【例 22】求$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\left(或\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}\,x\right)$的值.

解　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x)$

$$=-\left(\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)\right)$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\mathrm{d}x$$
$$=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$$

移项整理得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}I_1, & n为奇数\\[2ex] \dfrac{(n-1)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 2}I_0\quad, & n为偶数\end{cases}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}\,x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$
$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^0\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

所以简记为

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\quad, & n是奇数\\[2ex] \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n是偶数\end{cases}$$

这就是瓦里斯（Wailix）公式，在计算定积分时十分有用，应记住.

例如，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,\mathrm{d}\,x=\dfrac{6\times4\times2}{7\times5\times3}=\dfrac{16}{35}$.

【例 23】设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，$n>1$且为正整数，证明$I_n=\dfrac{1}{n-1}-I_{n-2}$，并由此递推公式，计算积分$I_5=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 x\mathrm{d}x$.

证 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\left(\sec^2 x-1\right)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\sec^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,\mathrm{d}(\tan x)-I_{n-2}$$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-I_{n-2}$$

$$=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

$$I_5=\frac{1}{4}-I_3=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-I_1\right)=-\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{4}-\ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{4}-\left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)$$

$$=\ln\sqrt{2}-\frac{1}{4}$$

加 油 站

被积函数带有三角有理式的定积分求法：

（1）积分限在$[0,\pi]$，做 $x=\pi-t$.

（2）积分限在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，做 $x=\frac{\pi}{2}-t$.

（3）积分限在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，做 $x=\frac{\pi}{4}-t$.

这是一种经验之谈，不是定理.

【例 24】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)\mathrm{d}x$.

解 设 $x=\frac{\pi}{4}-t$，则 $\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan t\right)\mathrm{d}t$$

移项整理得

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan x\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

【例 25】 计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(-\cos x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=x\tan\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x-(0-\ln 2)$$

$$=\frac{\pi}{2}+2\ln\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln 2+2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{2}$$

【例 26】 计算 $\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}}x^5\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}}x^5\mathrm{e}^{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^{\sqrt[3]{\ln 3}}x^3\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}(x^3)$

$$\overset{x^3=t}{=\!=}\frac{1}{3}\int_0^{\ln 3}t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^{\ln 3}t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)$$

$$=\frac{1}{3}\left(t\,\mathrm{e}^t\Big|_0^{\ln 3}-\int_0^{\ln 3}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(3\ln 3-\mathrm{e}^t\Big|_0^{\ln 3}\right)=\ln 3-\frac{2}{3}$$

【例 27】 设 $f''(x)$ 连续，且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，试求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

解　$\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,f'(2x)$

$$=\frac{1}{2}\left[xf'(2x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[f'(2)-\frac{1}{2}f(2x)\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}\left[f(2)-f(0)\right]=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}(3-1)=2$$

【例 28】 计算 $\int_0^2\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x$.

解　当 $x\in[0,1]$ 时，$x\geqslant x^2$；当 $x\in[1,2]$ 时，$x\leqslant x^2$.

$$\int_0^2\max\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,x+\int_1^2 x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{7}{3}=\frac{17}{6}$$

【例 29】 计算 $\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$.

解　设 $x=\sec t$，则 $\sqrt{x^2-1}=\tan t,\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$，因此有

$$\int_1^{\sqrt{2}}x^3\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3 t\tan^2 t\sec t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 t\tan^2 t\,\mathrm{d}(\tan t)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\tan^2 t\right)\tan^2 t\,\mathrm{d}(\tan t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t\,\mathrm{d}(\tan t)+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^4 t\,\mathrm{d}(\tan t)$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{5}\tan^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$$

【例 30】计算 $\int_0^1 x\sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x$．

解　设 $\sqrt{3-2x}=t$，则 $x=\frac{3-t^2}{2}$，$\mathrm{d}x=-t\,\mathrm{d}t$，因此有

$$\int_0^1 x\sqrt{3-2x}\,\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^1\frac{3-t^2}{2}\cdot t\cdot(-t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(3t^2-t^4\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t^3\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{1}{5}t^5\Big|_1^{\sqrt{3}}\right)=\frac{3\sqrt{3}-2}{5}$$

习　题　5.3

一、填空题

1．$\int_1^4\frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$__________；

2．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos^3 x\mathrm{d}x=$__________；

3．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=$__________；

4．$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^5(2x)\mathrm{d}x=$__________；

5．$\int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=$__________；

6．$\int_{-2}^2(x-2)\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=$__________．

二、单项选择题

1．下列积分正确的是（　　）．

A．$\int_{-1}^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\mathrm{d}x=-\int_{-1}^1\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1=-\frac{\pi}{2}$

B．$\int_{-1}^1\frac{1}{x}\ln x\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{-1}^1=0$

C．$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\overset{x=\sin t}{=\!=\!=}\int_0^{2\pi+\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$

D．$\int_{-2}^2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x=\pi$

2．$\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x=$（　　）．

A. $\frac{1}{4}(\pi-2)$　　B. $\frac{1}{2}(\pi-2)$　　C. $\frac{1}{3}(\pi-2)$　　D. $(\pi-2)$

3．$\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x =$（　　）．

A. $\ln 2-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $\ln 2-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

C. $\ln 2-3\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$　　D. $\ln 2-4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

4．$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$（　　）．

A. $2(2\ln 2-1)$　　B. $3(2\ln 2-1)$　　C. $4(2\ln 2-1)$　　D. $5(2\ln 2-1)$

5．$\int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x =$（　　）．

A. $2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$　　B. $2\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$

C. $1-\frac{\pi}{4}$　　D. $2(1-\pi)$

6．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\mathrm{d}x =$（　　）．

A. $1-\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{2}-1$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. 1

三、计算下列各定积分

1．$\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$；　　2．$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$；　　3．$\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}-1}\mathrm{d}x$；

4．$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　　5．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$；　　6．$\int_0^{2\pi} |\sin(x+1)|\mathrm{d}x$．

5.4　反 常 积 分

在一些实际问题中，常会遇到积分区间为无穷区间，或者被积函数为无界函数的积分，它们已经不属于前面所说的定积分了．因此，运用极限思想，将定积分做如下两种推广，从而形成了反常积分（也称广义积分）的概念，而前面讲的定积分称为常义积分．

5.4.1　无穷限的反常积分

定义 5.2　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，将 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 记作 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，即 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

如果上式右端极限存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散．

定义 5.3　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,b]$ 上连续，记 $\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{a\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

如果上式右端极限存在，则称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$收敛；如果极限不存在，则称反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$发散.

定义 5.4　如果$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，记$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

如果上式右端两个反常积分都收敛，则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；否则称$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 5.11　设$F(x)$是$f(x)$在$[a,+\infty)$上的一个原函数，若$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$存在，则反常积分$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-F(a)=F(x)\Big|_{a}^{+\infty}$. 当$F(+\infty)$不存在时，反常积分发散.

定理 5.12　设$F(x)$是$f(x)$在$(-\infty,b]$上的一个原函数，若$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$存在，则反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$. 当$F(-\infty)$不存在时，反常积分$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$发散.

定理 5.13　设$F(x)$是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一个原函数，则当$F(-\infty)$、$F(+\infty)$都存在时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$；当$F(-\infty)$、$F(+\infty)$有一个不存在时，反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

反常积分有如下一些性质：

（1）$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{a}^{+\infty} Af(x)\mathrm{d}x$（$A\neq 0$且为常数）具有相同的敛散性.

（2）$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$都收敛，则$\int_{a}^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x$收敛，且

$$\int_{a}^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\pm\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

注：① 若$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{a}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$都发散，则$\int_{a}^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x$也可能收敛.

② 定积分的换元法和分部积分法在反常积分中成立.

【例 1】计算反常积分$\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

解　因为$\int\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$，所以

$$\int_{3}^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\Bigg|_{3}^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln 2$$

【例 2】计算反常积分$\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

解　设$\sqrt{x-1}=t$，则$x=t^2+1$，$\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，因此有

$$\begin{aligned}\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x&=2\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t\,\mathrm{d}t=-2\int_{0}^{+\infty}t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t})\\&=-2\left(t\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right)\\&=-2\left(\mathrm{e}^{-t}\Big|_{0}^{+\infty}\right)=2\end{aligned}$$

【例 3】计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\arctan\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$

【例 4】计算反常积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$

【例 5】计算反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x$.

解　$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}\mathrm{d}x$

$$=\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Bigg|_{1}^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

注：下面的运算是错误的:

$$\int_{1}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln|x|\Big|_{1}^{+\infty}-\ln|1+x|\Big|_{1}^{+\infty}$$

这是因为$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散，不能用性质（2）.

遇到上述情形，必须先求出$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=F(x)+C$，再计算$F(x)\Big|_{1}^{+\infty}$，一定要记住这一点.

【例 6】计算反常积分$\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x$.

解　因为$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_{0}^{+\infty}=\infty$发散.

同理，$\int_{0}^{+\infty}\frac{3}{3x+1}\mathrm{d}x=\ln|3x+1|\Big|_{1}^{+\infty}=\infty$发散.

因此不能用性质（2）.

此时必须先求$\int\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln\sqrt{x^2+1}-\ln|3x+1|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1}\right|+C$，则

$$\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)\mathrm{d}x=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x+1}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\ln\frac{1}{3}-0=-\ln 3$$

【例 7】证明反常积分$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$（$a>0$）当$p>1$时收敛，当$p\leqslant 1$时发散.

证　当$p=1$时，$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_{a}^{+\infty}=+\infty$.

当$p\neq 1$时，$\int_{a}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{a}^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1\\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1\end{cases}$.

因此，当$p>1$时，这个反常积分收敛，其值为$\frac{a^{1-p}}{p-1}$；当$p\leqslant 1$时，发散.

特别是当$a=1$时，$p>1$，$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p-1}$.

这是最常用的一个反常积分，要牢记！

【例 8】已知$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x=4$，求 p 值.

解　因为$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x$ 收敛于 4，即$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3p-1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3p-1-1}=4$，因此 $p=\frac{3}{4}$.

5.4.2　无界函数的反常积分

下面把定积分推广到被积函数为无界函数的情形.

定义 5.5　如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点（也称为无界间断点）.

定义 5.6　设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，取$\varepsilon>0$，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式右端的极限存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛（也称瑕积分），否则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.7　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点，取$\varepsilon>0$，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$$

如果上式右端的极限存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛（也称瑕积分），否则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.8　设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，点 a,b 为 $f(x)$ 的瑕点，取 $\varepsilon>0$，$\delta>0$，$a<c<b$，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^c f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\delta\to0}\int_c^{b-\delta} f(x)\mathrm{d}x，\quad \varepsilon、\delta \text{ 独立}$$

如果右端两个极限都存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定义 5.9　如果函数 $f(x)$ 在 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上连续，c 是瑕点，记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to0^+}\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x，\quad \varepsilon、\delta \text{ 独立}$$

如果上式右端两个极限都存在，则称反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

定理 5.14　设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，在 $(a,b]$ 上，$F'(x)=f(x)$，如果 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 存在，则反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a^+)$. 这里仍用记号 $F(x)\big|_a^b$ 来表示 $F(b)-F(a^+)$.

其他情况也有类似的计算公式，其性质与无穷限的反常积分相同，这里不再详述.

无界函数的反常积分也可借助于牛顿–莱布尼茨公式、换元积分法和分部积分法来计算. 但是必须指出瑕点，被积函数的原函数在瑕点处的值，按照初等函数的连续性来求.

【例 9】计算瑕积分$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　$x=1$ 是瑕点，则

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x\big|_0^1=\frac{\pi}{2}$$

【例 10】计算瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

解　$x=0$ 是瑕点，则

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 \ln x \, d(\sqrt{x})$$
$$= 2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{x}\, d\ln x\right)$$
$$= -2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = -4\sqrt{x}\Big|_0^1 = -4$$

注：$\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$.

【例 11】讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 的敛散性.

解　当 $p=1$ 时，$x=0$ 是瑕点，则

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_0^1 = -\infty$$

当 $p\neq 1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_0^1 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & p<1 \\ \infty, & p>1 \end{cases}$$

于是当 $p<1$ 时，有 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 收敛于 $\frac{1}{1-p}$，即 $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p}$.

当 $p\geqslant 1$ 时，$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ 发散.

【例 12】讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ 的敛散性.

解　$x=a$ 是瑕点，当 $p=1$ 时，有

$$\int_a^b \frac{1}{x-a} dx = \ln(x-a)\Big|_a^b = \infty$$

当 $p\neq 1$ 时，有

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Bigg|_a^b = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p<1 \\ \infty, & p>1 \end{cases}$$

即瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$ 当 $p\geqslant 1$ 时发散.

当 $p<1$ 时，$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$ 收敛.

这个结论很重要，特别是例 11 的结论更重要，以后会经常用到.

【例 13】计算 $\int_0^1 \ln x \, dx$.

解　$x=0$ 是瑕点，则

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{d}(\ln x) = 0 - \int_0^1 \mathrm{d}x = -1$$

注：$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

【例 14】计算$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解　$x=0$是瑕点，分别考虑瑕积分$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$和$\int_{0}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，由例 11 知它们都发散，所以$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$发散.

注：以下计算是错误的

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0$$

这是因为$\frac{1}{x}$的原函数$\ln|x|$在$x=0$处不连续.

5.4.3　Γ函数

定义 5.10　$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$（其中$\alpha$称为参变量）作为参变量$\alpha$的函数，称为$\Gamma$函数，记为

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

定理 5.15　当$\alpha>0$时，$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$收敛.

定理 5.16　$\Gamma(\alpha)$满足下列关系:

（1）$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$；（2）$\Gamma(1)=1$；（3）$\Gamma(n+1)=n!$（$n$为自然数）.

证　（1）$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x^{\alpha}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$

$$\begin{aligned}
&= -\left(x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}(x^{\alpha})\right)\\
&= -\left(0 - \int_0^{+\infty}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\right) = \alpha\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\
&= \alpha\Gamma(\alpha)
\end{aligned}$$

（2）$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 1$

（3）在$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$中取$\alpha=n$.

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1)=n! \qquad (5.3)$$

公式（5.3）是一个递推公式，利用这个公式可使Γ函数的计算简单化. 例如，计算$\Gamma(4.5)$的值，利用递推公式:

$$\Gamma(4.5)=\Gamma(3.5+1)=3.5\Gamma(3.5)=3.5\times 2.5\Gamma(2.5)=3.5\times 2.5\times 1.5\Gamma(1.5)$$

Γ函数表可查《数学手册》，查表得$\Gamma(1.5)=0.8862$，代入上式即可.

【例 15】求$\int_0^{+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解　设$\alpha=6$，则

$$\Gamma(6)=\int_0^{+\infty} x^5\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 5!$$

【例 16】求 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}} dx$.

解　设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $dx=2t\,dt$，有

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}} dx = 2\int_0^{+\infty} t^7 e^{-t} dt = 2(7!)$$

加 油 站

【例 17】计算 $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$.

解　瑕点为 $x=e$，则

$$\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} d(\ln x)$$

$$= \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

【例 18】计算 $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

解　$x=1$ 是瑕点，设 $\sqrt{x-1}=t$，则 $x=t^2+1$， $dx=2t\,dt$，有

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{t^2+1}{t}(2t)\,dt = 2\int_0^1 (t^2+1)\,dt = 2\left(\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 + 1\right) = \frac{8}{3}$$

【例 19】计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

解　这是积分区间为无穷的反常积分.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = -\int_1^{+\infty} \ln x\, d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\left[\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(\ln x)\right]$$

$$= -\left(0 - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx\right) = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} = 1$$

【例 20】计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

解　这是反常积分，设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$， $dx=2t\,dt$，有

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)t} dt = 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$= 2\arctan t\Big|_1^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

【例 21】计算 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$.

解　这是反常积分. 由于

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \frac{1+x-x}{x^2(x+1)} dx = \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$=-\frac{1}{x}-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}-\ln|x|+\ln|x+1|+C$$

$$=-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|+C$$

所以 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x=\left(-\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)\Bigg|_1^{+\infty}=0-\left(-\frac{1}{1}+\ln 2\right)=1-\ln 2$.

【例 22】计算 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解　这是反常积分，应用分部积分法，则

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}\arctan x\right)$$

$$=-\left[0-\frac{\pi}{4}-\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2-x^2}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

而

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$$

$$=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$$

所以

$$I=\frac{\pi}{4}+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|\Bigg|_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}+0-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

【例 23】如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}t\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ，求 c 的值.

解　

$$\text{左}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{c}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{c}{x}\right)^x}=\frac{\mathrm{e}^c}{\mathrm{e}^{-c}}=\mathrm{e}^{2c}$$

$$\text{右}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{c}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{2t}=\frac{1}{2}\left(t\mathrm{e}^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}-\int_{-\infty}^{c}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(c\mathrm{e}^{2c}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\Big|_{-\infty}^{c}\right)=\frac{1}{2}\left(c\mathrm{e}^{2c}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2c}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2c}\left(c-\frac{1}{2}\right)$$

左=右，得 $c=\frac{5}{2}$.

【例 24】已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，试证：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$；　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

证　（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$

（2）
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\left[\frac{1}{x}\sin^2 x\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}(\sin^2 x)\right]\\&=-\left(0-2\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

习　题　5.4

一、填空题

1. $\int_0^{+\infty}x^5\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=$__________；

2. $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=$__________；

3. $\int_0^1\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=$__________；

4. $\int_1^2\frac{1}{(x-1)^{\alpha}}\mathrm{d}x=$__________；

5. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=$__________；

6. 设 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3-2p}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，则 $p=$__________；

7. $\int_0^1\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x=$__________；

8. 已知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{3-5p}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^{2+7p}}\mathrm{d}x$，则 $p=$__________.

二、单项选择题

1. 下列反常积分，（　　）的值为 $\frac{1}{2}$.

A. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty}2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

2. $\int_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $-\pi$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. $\frac{\pi}{2}$

3．当α满足条件（　　）时，$\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}\mathrm{d}x$收敛.

A．$\alpha\leqslant 1$　　B．$\alpha>0$　　C．$\alpha>1$　　D．$\alpha\geqslant 1$

4．$\int_{1}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=$（　　）.

A．$-\frac{1}{2\mathrm{e}}$　　B．$\frac{1}{2\mathrm{e}}$　　C．e　　D．2e

5．下列反常积分中（　　）收敛.

A．$\int_0^1\frac{1}{x}\mathrm{d}x$　　B．$\int_0^1\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$　　C．$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^1\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$

三、计算下列反常积分

1．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$；　　2．$\int_0^1\frac{x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　3．$\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$；

4．求c的值，使$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}t\mathrm{e}^{3t}\mathrm{d}t$成立；

5．$\int_1^{+\infty}x^3\mathrm{e}^{-\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$.

本 章 小 结

本章主要介绍了定积分的概念、性质及其计算方法，正是微积分基本定理沟通了微分学和积分学的联系.

其实导数与定积分是两种不同形式的极限，导数起源于计算曲线的切线，而定积分起源于计算平面图形的面积．虽然很多数学家都进行过一些研究，但始终没能发现它们之间的彼此联系，直到 17 世纪才由伟大的科学巨匠牛顿与莱布尼茨把它们联系在一起，这就是微积分基本定理：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b$$

式中，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，因此，求定积分，只需求$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$即可．但是求不定积分时应用了换元法和分部积分法，求定积分要先求不定积分，然后再找出一个原函数$F(x)$的方法未免有些麻烦了.

因此，求定积分时，直接用换元法和分部积分法更方便，千万记住两句话：换元时别忘了换积分限；分部时别忘了带积分限！

注意：换元时$x=\varphi(t)$所满足的条件，一定要记住.

如：计算$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$，有人设$\sqrt{1+\sin x}=t$，而$t$的上、下积分限为 1，因此$\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x=0$.

显然，这个结论是错误的，原因是$\sqrt{1+\sin x}=t$，$x=\arcsin(t^2-1)$的值并不全在$[0,\pi]$上.

定积分的计算最常用的方法是牛顿–莱布尼茨公式，除此之外，还有自己独特的方法.

例如，$\int_0^{\pi} x\sin^n x\mathrm{d}x$（$n$ 为奇数），由 5.3.1 节中的例 11（2）可知：

$$\int_0^{\pi} x\sin^n x\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!}{n!}\pi$$

此题求原函数是行不通的，因此对定积分来讲，除了记住牛顿–莱布尼茨公式外，还要记住一些常用的结论.

例如，求$\int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x$.

解　由 5.3.1 节中的例 9（1）知:

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 2\int_0^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{(n-1)!}{n!}\cdot(2\pi), & n\text{为偶数} \end{cases}$$

对于反常积分的做法基本上与常义定积分的做法一样，常义定积分如何做，反常积分就如何做，要注意瑕积分的瑕点必须在端点上.

复 习 题 5

一、填空题

1．$\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{x^2+1}\mathrm{d}x =$__________；

2．$\int_{-1}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$__________；

3．$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6}\mathrm{d}x$__________；

4．$\int_0^1 x^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}x$__________；

5．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\mathrm{d}x$__________；

6．$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\mathrm{d}x =$__________；

7．$\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x =$__________；

8．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t}{ax^b} = 1$，则 $a =$__________，$b =$__________.

二、单项选择题

1．下列积分不可直接使用牛顿–莱布尼茨公式的有（　　）.

A．$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$　　B．$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

C. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx$　　D. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2．下列积分中（　　）是反常积分.

A. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

C. $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$　　D. $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$

3．下列积分中错误的是（　　）.

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$　　B. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\,dx=0$

C. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$　　D. $\int_{0}^{+\infty}x3e^{-x}dx=6$

4．下列反常积分中（　　）是收敛的.

A. $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\,dx$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx$

C. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx$　　D. $\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx$

5．当（　　）时，反常积分$\int_{-\infty}^{0}e^{-x}dx$收敛.

A. $k>0$　　B. $k\geqslant 0$　　C. $k<0$　　D. $k\leqslant 0$

6．下列各式正确的是（　　）.

A. $\int f'(x)dx=f(x)$　　B. $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx=f(x)$

C. $\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt=f(x)$　　D. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$

7．初等函数$y=f(x)$在其定义域$[a,b]$上，正确的有（　　）个.

①连续；②可导；③可微；④可积.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

8．设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$在区间$[a\ \ b]$上结论正确的有（　　）个.

①连续；②可导；③可微；④可积；⑤有界.

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

9．若$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}$，且$f(0)=1$，则$f(x)=$（　　）.

A. $e^{\frac{x}{2}}$　　B. $\frac{1}{2}e^{x}$　　C. e^{2x}　　D. $\frac{1}{2}e^{2x}$

10．设函数$y=\int_0^x(e^t-1)dt$，则y有（　　）.

A．极小值 e−2　　B．极小值 2−e　　C．极大值 e−2　　D．极大值 2−e

11．若$\int_0^1(2x+a)dx=2$，则$a=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

12．如图 5.9 所示，阴影部分的面积，可用下列各式中的（　　）表示.

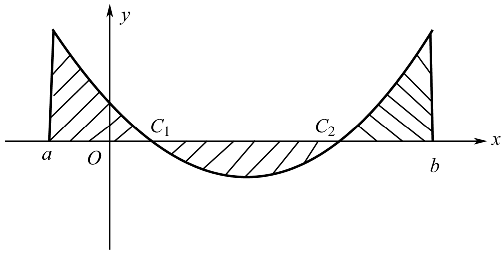


图 5.9

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

B. $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

C. $\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

D. $\int_a^{c_1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{c_1}^{c_2} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

三、计算题

1．计算下列积分.

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{x-\cos x}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_0^1 \max\{t^3,t^2,1\}\mathrm{d}t$；　（5）$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$；　（6）$\int_0^{\pi} x|\cos x|\mathrm{d}x$.

2．已知$\int_0^x f(t-x)\mathrm{d}t=\sin(x^3+1)$，求 $f(x)$.

3．已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$，求 a、b 的值.

4．设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & x<1\\ x\ln x, & x\geqslant 1\end{cases}$，求$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

5．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，且$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，求$k$.

6．计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\cos x\mathrm{d}x$.

7．计算$\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

8．求 c 的值，使$\int_0^1(x^2+cx+c)^2\mathrm{d}x$ 最小.

9．求 $f(x)=\int_0^x(t^2-3t+2)\mathrm{d}t$ 的极值.

第 6 章　定积分的应用

定积分是求某种总量的数学模型，它在几何学、物理学、经济学、社会学等方面都有广泛的应用，显示出巨大的魅力．也正是这些广泛的应用，推动着积分学的不断发展和完善．因此，在学习的过程中，不仅要掌握计算某些实际问题的公式，更重要的是深刻领会用定积分解决实际问题的基本思想和方法——微元法，不断积累和提高数学的应用能力．

6.1　平面图形的面积

6.1.1　定积分的微元法

用定积分解决实际问题的常用方法是微元法，下面介绍这种方法．首先回忆用定积分求曲边梯形面积的问题．

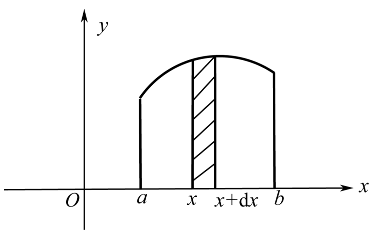


图 6.1

1．曲边梯形的面积

设 $y=f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上连续，如图 6.1 所示．

在 $[a,b]$ 内任意插入 $n-1$ 个分点，将 $[a,b]$ 分成长度为 Δx_i（$i=1,2,\cdots,n$）的 n 个小区间，每个小区间相应的小曲边梯形的面积 ΔS_i 为

$$\Delta S_i \approx f(x_i)\Delta x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

将 n 个面积相加得 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$，便是整个曲边梯形面积 S 的近似值，最后取极限，得 S 的精确值．

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

在实用上，为了简便起见，省略下标 i，将 $f(x)\Delta x$ 叫作面积元素，以后称为微元，记作

$$f(x)\mathrm{d}x=f(x)\Delta x=\mathrm{d}S$$

只要写出微元 $\mathrm{d}S=f(x)\mathrm{d}x$，则 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$．

如果 $f(x)$ 有正有负，则

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

2．变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，其速度 $v=v(t)$ 是个变速运动，求 t 在 $[a,b]$ 走的路程．将 $[a,b]$ 分成

n个小时间段，在每个小时间段，近似地认为是等速运动，因此在每个小时间段走的路程的微元是$\mathrm{d}s=v(t)\mathrm{d}t$，所以

$$s=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

3．变力沿直线所做的功

一变力$F(x)$沿直线由a位移到b，求$F(x)$所做的功.

将$[a,b]$任意分成n个小区间，在每个小区间上近似地认为是常力，因此在每个小区间上做功的微元是$\mathrm{d}w=F(x)\mathrm{d}x$，则

$$w=\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$$

微元法的步骤如下：

（1）将区间$[a,b]$分成n个小区间，取典型区间$[x,x+\mathrm{d}x]$；

（2）在每个小区间写出微元$\mathrm{d}v=f(x)\mathrm{d}x$；

（3）$v=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

6.1.2　平面图形的面积

由连续曲线$y=f(x)$（$f(x)\geqslant 0$），以及直线$x=a$、$x=b$（$a<b$）和x轴所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果$f(x)$在$[a,b]$上不都是非负的，由定积分对区间的可加性，则所围图形的面积为

$$S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

本节将讨论一般平面图形的问题，其面积可用定积分来计算．下面运用定积分的微元法，建立不同坐标系下平面图形的面积计算公式.

1．直角坐标情形

先来介绍平面图形的分类.

（1）X型：平面图形D，从图形的最左边做直线$x=a$，到图形的最右边做直线$x=b$．在这个带形里，如果图形D从a到b的上面是一条曲线，下面也是一条曲线，则称该图形D为X型的.

（2）Y型：平面图形D，从图形的最下方做直线$y=c$，到图形的最上方做直线$y=d$．在这个带形里，如果左边是一条曲线，右边也是一条曲线，则称该图形为Y型的.

（3）混合型：既不是X型，也不是Y型，叫混合型.

【例 1】计算由$y=x^2$、$y=x$所围成图形的面积.

解　这两条曲线所围成的图形如图 6.2 所示，由图可知该图形既是X型，又是Y型，先求出它们的交点.

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$，得$x_1=0$、$y_1=0$及$x_2=1$、$y_2=1$.

图形在直线$x=0$与$x=1$之间，因此在$[0,1]$内任取一小

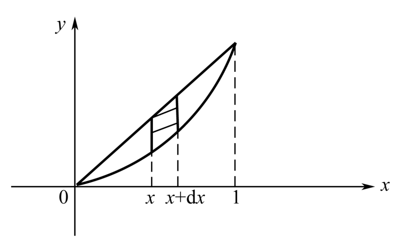


图 6.2

区间$\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$，这小条的微元就是

$$\mathrm{d}S=(上-下)\mathrm{d}x=\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$$

所以

$$S=\int_0^1\left(x-x^2\right)\mathrm{d}\,x=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

以后 X 型的面积直接用公式 $S=\int_a^b\left(上-下\right)\mathrm{d}x$ 来求.

【例 2】求抛物线 $y^2=x+2$ 与直线 $x-y=0$ 所围图形的面积.

解　先做图形（见图 6.3）. 为求抛物线与直线的交点，解方程组

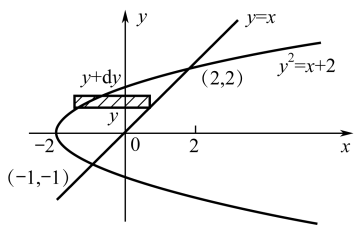


图 6.3

$$\begin{cases}y^2=x+2\\x-y=0\end{cases}$$

得交点为(−1，−1)与(2，2). 取 y 为积分变量，$y\in[-1,2]$. 相应于[−1,2]上任一小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$的曲边梯形面积近似为$[y-(y^2-2)]\mathrm{d}y$，即面积微元为 $\mathrm{d}A=[y-(y^2-2)]\mathrm{d}y$. 以$[y-(y^2-2)]\mathrm{d}y$ 为被积表达式，在区间[−1,2]上做定积分，便得所求面积为

$$A=\int_{-1}^{2}\left[y-\left(y^2-2\right)\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+2y\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$

以后 Y 型的面积直接用公式 $S=\int_c^d\left(右-左\right)\mathrm{d}y$ 来求.

【例 3】求由曲线 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 及直线 $x=0$、$x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围图形的面积.

解　两线交点可由

$$\begin{cases}y=\sin x\\y=\cos x\end{cases}$$

解得$\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，如图 6.4 所示.

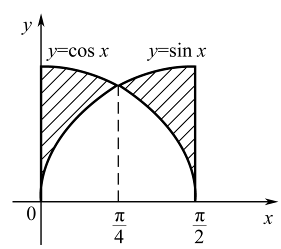


图 6.4

取 x 为积分变量，则

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+(-\cos x-\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2(\sqrt{2}-1)$$

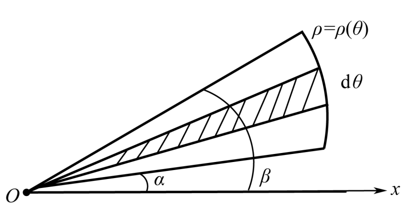


图 6.5

2．极坐标情形

某些图形的面积用极坐标计算更方便.

设由曲线$\rho=\rho(\theta)$及射线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$围成的图形，如图 6.5 所示（简称曲边扇形），在区间$\left[\alpha,\beta\right]$上取一小区间$\left[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta\right]$的曲边扇形，其面积微元为

$$\mathrm{d}\,S=\frac{1}{2}\left[\rho\left(\theta\right)\right]^2\mathrm{d}\,\theta$$

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\rho^{2}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{6.2}$$

【例 4】计算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）所围成图形的面积.

解　心形线如图 6.6 所示，这个图形对称于极轴.

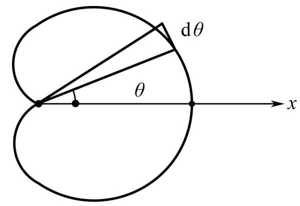


图6.6

极轴以上部分的图形，θ 的变化区间为 $[0,\pi]$，因此这部分的面积由公式（6.2）得:

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[a(1+\cos\theta)\right]^2\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\pi+\int_0^{\pi}\left(2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\right]\\&=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\pi+2\sin\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi}\right)=\frac{3}{4}\pi a^2\end{aligned}$$

所以

$$S=2S_1=\frac{3}{2}\pi a^2$$

3．曲线为参数方程

曲线为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，那么由曲线 x 轴及直线 $x=a$、$x=b$ 所围图形的面积由公式（6.1）知

$$S=\int_a^b|y|\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}|\psi(t)||\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

【例 5】设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a$、$b$ 为正的常数），求其面积 A .

解　椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

由对称性，知

$$\begin{aligned}A&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}|b\sin t\cdot(a\cos t)'|\mathrm{d}t\\&=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t\\&=\pi ab\end{aligned}$$

加 油 站

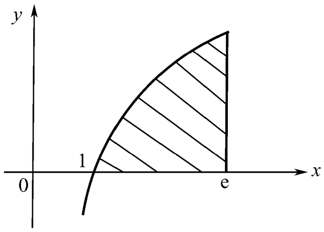


图 6.7

【例 6】求由曲线 $y=\ln x, y=0, x=\mathrm{e}$ 所围图形的面积.

解　它们围成的图形如图 6.7 所示.

其面积 $S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\,\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x\,\mathrm{d}\ln x=\mathrm{e}-\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x=1$.

【例 7】求由 $y=\dfrac{1}{x}$、$y=x$、$x=\mathrm{e}$ 所围图形的面积.

解　它们所围成的图形如图 6.8 所示.

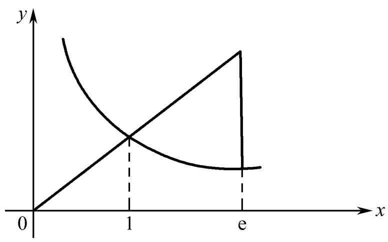


图6.8

其面积 $S=\int_1^{\mathrm{e}}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2\Big|_1^{\mathrm{e}}-\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-1\right)-1=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2-3\right).$$

【例 8】求阿基米德螺线.

$\rho=a\theta$（$a>0$）上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形（见图 6.9）的面积.

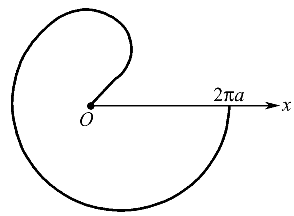


图 6.9

解　这是极坐标情形，由公式（6.2）得：

$$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}a^2\theta^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{3}\theta^3\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2$$

【例 9】求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$（$a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$）所围成图形的面积.

解　由图形对称性知，求出第一象限内的面积再乘以 4 即可得所求的面积.

在第一象限内的面积为 $S_1=\int_0^a y\mathrm{d}x$．当 $x=0$ 时，$t=\dfrac{\pi}{2}$；当 $x=a$ 时，$t=0$，故

$$\begin{aligned}S_1&=\int_0^a y\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^a a\sin^3 t\mathrm{d}(a\cos^3 t)\\&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-3a^2)\sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t\\&=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t\\&=3a^2\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{3}{32}\pi a^2\end{aligned}$$

于是所求面积为 $S=4S_1=\dfrac{3}{8}\pi a^2$.

【例 10】已知 $y=1-x^2$ 与 x 轴所围图形的面积被曲线 $y=ax^2$ 平分，求 a 的值.

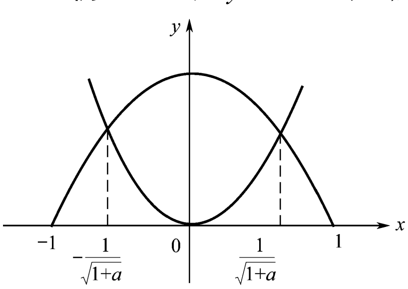


图 6.10

解　所围的图形如图 6.10 所示，$y=1-x^2$ 与 $y=ax^2$ 的交点可由 $\begin{cases}y=1-x^2\\ y=ax^2\end{cases}$ 得 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+a}},\dfrac{a}{1+a}\right)$.

先计算 $y=1-x^2$ 与 x 轴所围的平面图形的面积:

$$S=\int_{-1}^1\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=2-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^1=\frac{4}{3}$$

所以 $y=1-x^2$ 与 $y=ax^2$ 所围图形的面积为 $\dfrac{2}{3}$，即

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{1+a}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(1-x^2-ax^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{1+a}}-\frac{1+a}{3}x^3\Bigg|_{-\frac{1}{\sqrt{1+a}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{4}{3\sqrt{1+a}}=\frac{2}{3}$$

所以 $a=3$.

【例 11】求由 $y=\dfrac{1}{x}, y=x, x=\mathrm{e}, y=0$ 所围图形的面积.

解　它们所围的图形如图 6.11 所示.

这是混合型的，有

$$S=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Bigg|_0^1+\ln x\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

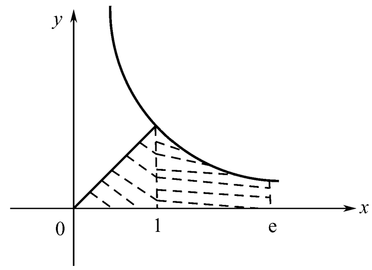


图 6.11

习　题　6.1

一、计算题

1．求下列曲线所围成的平面图形的面积.

（1）由 $y=x^2$、$y=2x$、$y=x$ 所围的图形；

（2）曲线 $y=x^3$ 及 y 轴与直线 $y=8$ 所围的图形；

（3） $y=\mathrm{e}^x$ 、 $y=\mathrm{e}^{2x}$ 与直线 $y=2$ 所围的图形；

（4）曲线 $y=9-x^2$ 与曲线 $y=x^2$ 所围的图形；

（5）由曲线 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 所围成的图形；

（6）由直线 $y=2\pi-x$ 与曲线 $y=\sin x$，以及直线 $x=0$、$x=2\pi$ 所围的图形；

（7）摆线 $x=a(t-\sin t)$、$y=a(1-\cos t)$ 的一拱（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与 x 轴所围的图形；

（8） $y=\mathrm{e}^x$ 、 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 及直线 $x=1$ 所围的图形；

（9） $\rho=2a\cos\theta$ 所形成的图形；

（10） $\rho=2a\left(2+\cos\theta\right)$ 所形成的图形.

2．求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $\left(0,-3\right)$ 和 $\left(3,0\right)$ 处的切线所围成的图形的面积.

3．已知曲线 $f(x)=x-x^2$ 与 $g(x)=ax$ 围成的图形面积等于 $\dfrac{9}{2}$，求常数 a .

6.2　体积与曲线的弧长

本节讨论两种特殊的立体的体积，并给出计算公式.

6.2.1　旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕一条直线旋转一周而生成的立体，这条直线叫旋转轴，球体、圆柱、圆锥、圆台等都是旋转体.

下面来讨论一条连续曲线 $y=f\left(x\right)\geqslant 0$，直线 $x=a$ 、 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成的立体体积的计算方法（见图 6.12）.

在 $\left[a,b\right]$ 上任取一小区间 $\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$，这小条的曲边梯形绕 x 轴旋转而生成的立体近似于以

$f(x)$ 为底半径，高为 $\mathrm{d}x$ 的圆柱体，体积微元为

$$\mathrm{d}V_x = \pi\left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

所以
$$V_x = \int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x \tag{6.4}$$

下面再来讨论由两条连续曲线 $y = f(x) \geqslant 0$ 、 $y = g(x) \geqslant 0$ 、 $f(x) \geqslant g(x)$ 及直线 $x = a$ 、 $x = b$ 所围成的图形绕 x 轴旋转生成的立体的体积，如图 6.13 所示.

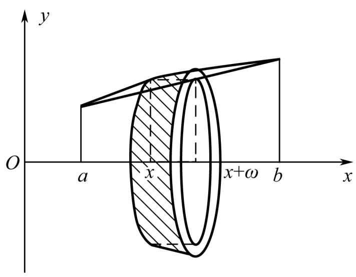


图6.12

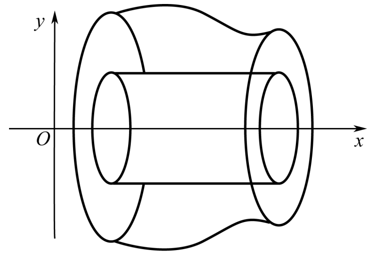


图6.13

显然其体积为

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x - \pi\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x = \pi\int_a^b\left[f^2(x) - g^2(x)\right]\mathrm{d}x$$

因此，当两曲线在 x 轴上方时，绕 x 轴旋转生成的立体的体积为

$$V_x = \pi\int_a^b\left(\text{上}^2 - \text{下}^2\right)\mathrm{d}x \tag{6.5}$$

自己考虑一下：图形经过 x 轴怎么办？

图形在 x 轴下方时，绕 x 轴旋转的旋转体的体积为

$$V_x = \pi\int_a^b\left(\text{下}^2 - \text{上}^2\right)\mathrm{d}x \tag{6.6}$$

用与上面类似的方法可以推出：由曲线 $x = \varphi(y)$，直线 $y = c$ 、 $y = d$ （ $c < d$ ）与 y 轴所围成的图形绕 y 轴旋转一周而生成的旋转体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y$$

如果由两条连续曲线 $x = \varphi(y) \geqslant 0$ 、 $x = h(y) \geqslant 0$ 、 $\varphi(y) \geqslant h(y)$ 及直线 $y = c$ 、 $y = d$ 所围图形绕 y 轴旋转一周生成的立体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y - \pi\int_c^d h^2(y)\mathrm{d}y = \pi\int_c^d\left[\varphi^2(y) - h^2(y)\right]\mathrm{d}y$$

因此，当两曲线在 y 轴的右方时，绕 y 轴旋转一周生成的立体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d\left(\text{右}^2 - \text{左}^2\right)\mathrm{d}y \tag{6.7}$$

当图形在 y 轴的左方时，绕 y 轴旋转一周生成的立体的体积为

$$V_y = \pi\int_c^d\left(\text{左}^2 - \text{右}^2\right)\mathrm{d}y \tag{6.8}$$

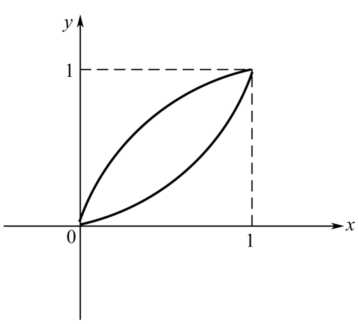


图6.14

【例 1】求由 $y = \sqrt{x}$ 、 $y = x^2$ 所围图形绕 x 轴旋转及绕 y 轴旋转一周生成的立体的体积.

解　两条曲线如图 6.14 所示.

$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$ 的交点为 $(0,0)$ 与 $(1,1)$.

$$V_x=\pi\int_0^1(x-x^4)\,dy=\pi\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1\right)=\frac{3}{10}\pi$$

$$V_y=\pi\int_0^1(y-y^4)\,dy=\pi\left(\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1-\frac{1}{5}y^5\Big|_0^1\right)=\frac{3}{10}\pi$$

【例 2】求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴与 y 轴旋转一周生成的立体的体积.

解　图形如图 6.15 所示.

由公式（6.5）可知

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\left(2a-\frac{1}{3a^2}x^3\Big|_{-a}^{a}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

由公式（6.7）可知

$$V_y=\pi\int_{-b}^{b}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi a^2\left(2b-\frac{1}{3b^2}y^3\Big|_{-b}^{b}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^2 b$$

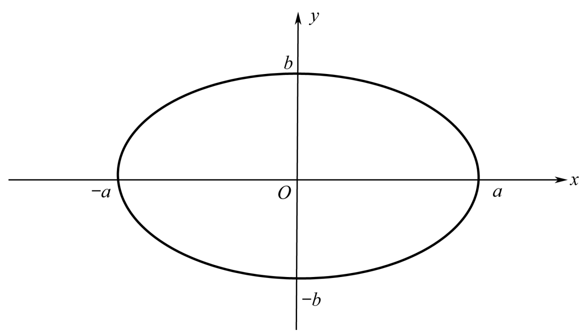


图6.15

【例 3】求由抛物线 $y=2x^2$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积（见图 6.16）.

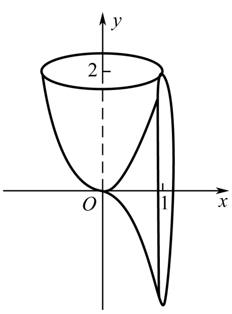


图6.16

解　先求绕 x 轴旋转而形成的旋转体的体积 V_x:

$$V_x=\int_0^1\pi y^2dx=\int_0^1\pi(2x^2)^2dx=4\pi\int_0^1x^4\,dx=\frac{4}{5}\pi$$

再求绕 y 轴旋转而形成的旋转体的体积 V_y:

$$V_y=\pi\cdot1^2\cdot2-\int_0^2\pi x^2dy=2\pi-\int_0^2\pi\cdot\frac{y}{2}\,dy=2\pi-\frac{\pi}{4}\cdot y^2\Big|_0^2=\pi$$

【例 4】计算摆线 $x=a(t-\sin t)$、$y=a(1-\cos t)$ 相应于 $0\leqslant t\leqslant2\pi$ 的一拱，以及直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周而生成的立体的体积.

解　摆线如图 6.17 所示.

由公式（6.5）可知

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi a}y^2\,dx=\pi\int_0^{2\pi}\left[a(1-\cos t)\right]^2\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2t-\cos^3t)\,dt$$

$$=5\pi^2a^3$$

由公式（6.7）可知

$$V_y=\pi\int_0^{2a}(右^2-左^2)\,dy$$

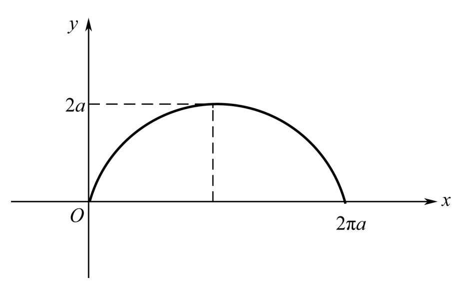


图6.17

$$=\pi\left[\int_{2\pi}^{\pi}a^2\left(t-\sin t\right)^2\cdot a\sin t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}a^2\left(t-\sin t\right)^2\cdot a\sin t\,\mathrm{d}t\right]$$
$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}\left(t-\sin t\right)^2\sin t\,\mathrm{d}t=6\pi^3a^3$$

6.2.2 已知平行截面面积的立体体积

从计算旋转体的体积过程可以知道：如果一个立体不是旋转体，但知道该立体垂直于一定轴（如 x 轴）的各点处的截面面积，那么这个立体的体积也可用定积分来计算，如图 6.18 所示．

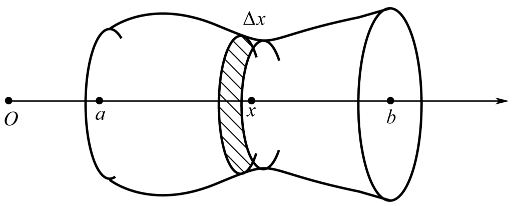


图 6.18

设立体在过点 $x=a$ 、 $x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，以 $S(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积．假定 $S(x)$ 是已知的连续函数，在 $[a,b]$ 上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的一薄片的体积，近似于底面为 $S(x)$ 、高为 $\mathrm{d}x$ 的柱体的体积，即体积微元为

$$\mathrm{d}v=s(x)\mathrm{d}x$$

于是
$$v=\int_a^b s(x)\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

【例 5】一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角 α ，如图 6.19 所示，计算此平面截圆柱体所得楔形体的体积 V .

解　方法一：建立坐标系如图 6.19 所示，则底面圆方程为 $x^2+y^2=R^2$ ．对任意的 $x\in[-R,R]$ ，过点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形，两直角边的长度分别为 $y=\sqrt{R^2-x^2}$ 和 $y\tan\alpha=\sqrt{R^2-x^2}\tan\alpha$ ，故截面面积为

$$A(x)=\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha$$

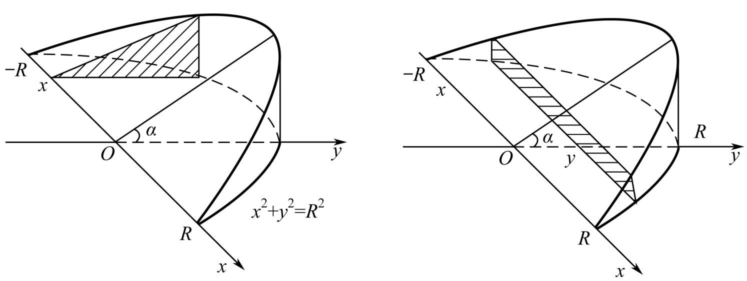


图6.19

$$V=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\tan\alpha\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\tan\alpha\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

方法二：在楔形体中，过点 y 且垂直于 y 轴的截面是一个矩形，如图 6.19 所示，其长为 $2x=2\sqrt{R^2-y^2}$ ，高为 $y\tan\alpha$ ，故其面积为

$$A(y)=2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha$$

从而，楔形体的体积为

$$V=\int_0^R 2y\sqrt{R^2-y^2}\tan\alpha\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}\tan\alpha\left(R^2-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^R=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

6.2.3　平面曲线的弧长

本书在前面讲过弧微分，每个光滑曲线弧都是可求长的，由曲线的弧微分可求曲线弧的长.

1．设光滑曲线弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程

$x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$，$\varphi'(t)$、$\psi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续.

弧微分：

$$\mathrm{d}l=\sqrt{\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\varphi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t$$

弧长：

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left[\psi'(t)\right]^2+\left[\varphi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t \tag{6.10}$$

【例 6】求圆 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$ 的长度.

解　由公式（6.10）可知

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(-a\sin t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{2\pi}a\,\mathrm{d}t=2\pi a$$

【例 7】求摆线 $x=a\left(t-\sin t\right)$、$y=a\left(1-\cos t\right)$ 一拱（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）的弧长，如图 6.20 所示.

解　由公式（6.10）可知

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\left(1-\cos t\right)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\left(1-\cos t\right)}\,\mathrm{d}t$$
$$=2a\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t=8a$$

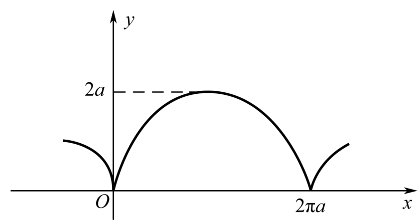


图 6.20

即一拱的长度是动圆半径的 8 倍.

2．曲线弧段由直角坐标方程给出

$y=f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$，$f'(x)$ 在 $[a\ \ b]$ 上连续，则由公式（6.10）得

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x \tag{6.11}$$

【例 8】求曲线 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=0$ 到 $x=1$ 的一段弧长.

解　由公式（6.11）可知

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

3．光滑曲线弧段 $\overset{\frown}{AB}$ 由极坐标方程给出

$\rho=\rho(\theta)$，$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，其中 $\rho'(\theta)$ 连续.

$x=\rho\cos\theta=\rho(\theta)\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta=\rho(\theta)\sin\theta$，代入公式（6.10）得

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{6.12}$$

【例 9】求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$（$a>0$）的全长，如图 6.21 所示.

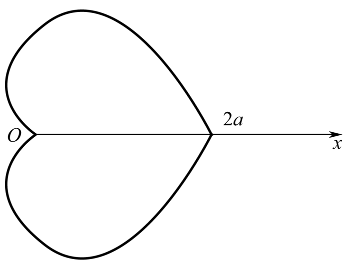


图 6.21

解　$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$
$$=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta$$

由对称性知
$$s=2\int_0^{\pi}a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta=2a\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a$$

加 油 站

【例 10】求由 $y=-x^2$、$y=x$ 所围图形：
（1）面积 S；（2）V_x；（3）V_y.

解　它们所围图形如图 6.22 所示.

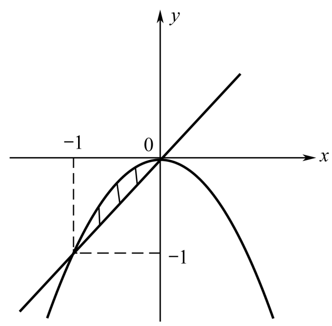


图 6.22

（1）$$S=\int_{-1}^{0}\left(-x^2-x\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}$$
$$=-\frac{1}{3}\left(0+1\right)-\frac{1}{2}\left(0-1\right)=\frac{1}{6}$$

（2）图形在 x 轴下方，由公式（6.6）可知
$$V_x=\pi\int_{-1}^{0}\left(x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{5}x^5\Big|_{-1}^{0}\right)=\frac{2}{15}\pi$$

（3）图形在 y 轴的左方，由公式（6.8）可知
$$V_y=\pi\int_{-1}^{0}\left(\text{左}^2-\text{右}^2\right)\mathrm{d}y=\pi\int_{-1}^{0}\left(-y-y^2\right)\mathrm{d}y$$
$$=\pi\left(-\frac{1}{2}y^2\Big|_{-1}^{0}-\frac{1}{3}y^3\Big|_{-1}^{0}\right)=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

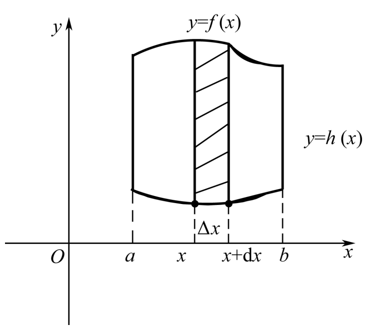


图6.23

【例 11】求由连续曲线 $y=f\left(x\right)$、$y=h\left(x\right)$、$x=a$、$x=b$ 所围图形（见图 6.23）绕 y 轴旋转一周生成的立体的体积.

解　在 $\left[a,b\right]$ 上任取一小区间 $\left[x,x+\mathrm{d}x\right]$，在小区间的端点做垂直于 x 轴的直线，将这小条绕 y 轴旋转一周得到一薄柱壳，把它剖开展平，得到一块近似于厚为 $\mathrm{d}x$，长为 $2\pi x$，宽为 $\left[f\left(x\right)-h\left(x\right)\right]$ 的长方体，它的体积微元为 $\mathrm{d}v=2\pi x\left[f\left(x\right)-h\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$，于是
$$V=2\pi\int_a^b x\left[f\left(x\right)-h\left(x\right)\right]\mathrm{d}x \qquad (6.13)$$

这就是柱壳体积公式.

【例 12】求曲线 $y=\ln x$、y 轴与直线 $y=\ln a$、$y=\ln b$，$b>a>1$ 所围图形：
（1）面积 S；（2）V_y；（3）V_x.

解　它们所围图形如图 6.24 所示.

（1）面积 S，Y 型.

$$S=\int_{\ln a}^{\ln b}e^{y}dy=e^{y}\Big|_{\ln a}^{\ln b}=b-a$$

（2）$V_y=\pi\int_{\ln a}^{\ln b}e^{2y}dy=\dfrac{\pi}{2}e^{2y}\Big|_{\ln a}^{\ln b}=\dfrac{\pi}{2}\left[e^{2\ln b}-e^{2\ln a}\right]$

$$=\frac{\pi}{2}\left(b^2-a^2\right)$$

（3）柱壳法. 因为 $b>a>1$，图形在 Ox 轴上方，由公式（6.13）可知

$$\begin{aligned}V_x&=2\pi\int_{\ln a}^{\ln b}y\left(e^y-0\right)d\,y=2\pi\int_{\ln a}^{\ln b}y\,d\,e^y\\&=2\pi\left(y\,e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}-\int_{\ln a}^{\ln b}e^y\,d\,y\right)\\&=2\pi\left(b\ln b-a\ln a-e^y\Big|_{\ln a}^{\ln b}\right)\\&=2\pi\left(b\ln b-a\ln a-b+a\right)\\&=2\pi\left[b\left(\ln b-1\right)-a\left(\ln a-1\right)\right]\end{aligned}$$

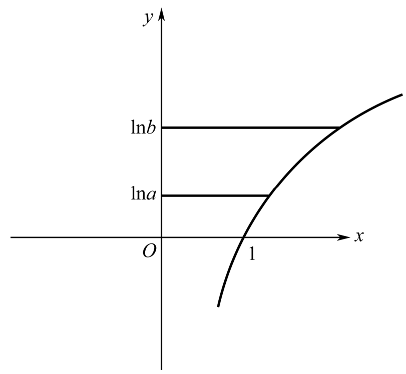


图6.24

【例 13】求曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$（$1\leqslant x\leqslant e$）的弧长.

解　$y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$，$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx$

所求弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_1^e\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^e=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

习　题　6.2

一、计算题

1．求下列各题中给出的平面图形绕指定轴旋转形成的旋转体的体积.

（1）曲线 $y=\sqrt{x}$、直线 $x=4$、$y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转.

（2）在第一象限中，等轴双曲线 $xy=9$ 与直线 $x+y=10$ 所围的平面图形绕 y 轴旋转.

（3）由抛物线 $y^2=4x$ 与 $y^2=8x-4$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转.

（4）由 $y=e^x$、x 轴、y 轴与直线 $x=1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转.

2．求下列各曲线在给定弧段上的弧长.

（1）求曲线 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 从 $x=0$ 到 $x=1$ 一段弧的长.

（2）计算曲线 $y=\ln x$ 上相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧长.

（3）求星形线 $x=a\cos^3 t$、$y=a\sin^3 t$（$a>0$）的长度.

（4）求曲线 $\rho(\theta)=1$ 相应于 $\theta=\dfrac{3}{4}$ 到 $\theta=\dfrac{4}{3}$ 的一段弧长.

6.3 定积分在物理学上的应用

6.3.1 变力沿直线所做的功

由物理学知，若一个大小和方向都不变的恒力 F 作用于一物体，使其沿力的方向做直线运动，并移动了一段距离 s，则 F 所做的功为 $W=F\cdot s$.

下面用微分元素法来讨论变力做功问题.设有大小随物体位置改变而连续变化的力 $F=F(x)$ 作用于一物体上，使其沿 x 轴做直线运动，力 F 的方向与物体运动的方向一致，从 $x=a$ 移至 $x=b>a$（见图 6.25）. 在 $[a,b]$ 上任一点 x 处取一微小位移 $\mathrm{d}x$，当物体从 x 移到 $x+\mathrm{d}x$ 时，$F(x)$ 所做的功近似等于 $F(x)\mathrm{d}x$，即功元素 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$，于是

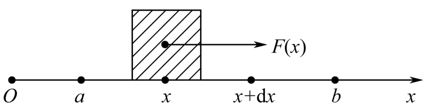


图 6.25

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x \tag{6.14}$$

【例 1】弹簧在拉伸过程中，需要的力 F（单位：N）与伸长量 x（单位：cm）成正比，即

$$F=kx \quad （k\text{ 是比例系数}）$$

如果把弹簧由原长拉伸 6cm，计算所做的功.

解 物理学中十分注意量纲，功的基本单位是焦耳 $\mathrm{J}=\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$，所以应将 6cm 写成 0.06m，由公式（6.14）得

$$W=\int_0^{0.06}kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x^2\Big|_0^{0.06}=0.0018k\ （\mathrm{J}）$$

但是千万不能这样做:

$$W=\int_0^{6}kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x^2\Big|_0^{6}=18k\ （\mathrm{N}\cdot\mathrm{cm}）=0.18k\ （\mathrm{J}）$$

【例 2】有一长为 1m 的木桩埋在泥土中，它的上端刚好与地面相齐，为了把木桩拔出，必须沿木桩方向使力，已知所用的力为 $F(x)=50(1-x)$（N），其中 x 为木桩已拔出部分的长. 求把木桩全部拔出所做的功.

解 功微元为 $\mathrm{d}W=50(1-x)\mathrm{d}x$，所以

$$W=\int_0^1 50(1-x)\,\mathrm{d}x=50\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=25\ （\mathrm{J}）$$

【例 3】地面上有一截面面积为 $A=20\ \mathrm{m}^2$，深为 4 m 的长方体水池盛满水，用抽水泵把这池水全部抽到离池顶 3m 高的地方去，问需做多少功?

解 建立坐标系，如图 6.26 所示. 设想把池中的水分成很多薄层，则把池中全部水抽出所做的功 W 等于把每一薄层水抽出所做的功的总和. 在 [0,4] 上取小区间 [$x,x+\mathrm{d}x$]，相应于此小区间的那一薄层水的体积为 $20\mathrm{d}x\ \mathrm{m}^3$，设水的密度 $\rho=1\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，故这层水重为（ $2\times10^4 g\mathrm{d}x$ ）kg. 将它抽到距池顶 3m 高处克服重力所

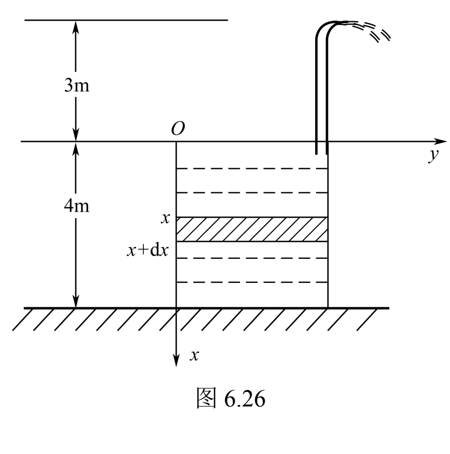


图 6.26

做功为

$$\mathrm{d}W = 2\times10^4\cdot(x+3)\cdot g\mathrm{d}x$$

从而，将全部水抽到离池顶 3m 高处所做的功为

$$W=\int_0^4 2\times10^4\cdot(x+3)\cdot g\,\mathrm{d}x = 1.96\times10^5\times\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_0^4$$

$$=3.92\times10^6\text{（J）（其中 } g=9.8\mathrm{m\cdot s^{-2}}\text{）}$$

【例 4】有一弹簧，用 5N 的力可以把它拉长 0.01m，要把弹簧拉长 0.4m，求拉力所做的功.

解　在弹性限度内，弹簧弹力 F 的大小与弹簧伸展（或压缩）的长度 x 成正比，即 $F=kx$. 当 $x=0.01\mathrm{m}$ 时，$F=5\mathrm{N}$，$5=0.01k$，$k=500\mathrm{N/m}$，从而有

$$F=500x$$

$$W=\int_0^{0.4}500x\,\mathrm{d}x = 500\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.4}=40\text{（J）}$$

6.3.2　水压力

由帕斯卡（Pascal）定律，在液面下深度为 h 的地方，液体重量产生的压强为 $p=\rho gh$，其中 ρ 为液体密度，g 为重力加速度. 即液面下的物体受液体的压强与深度成正比，同一深度处各方向上的压强相等. 面积为 A 的平板水平置于水深为 h 处，平板一侧的压力为

$$F=pA=\rho ghA$$

下面考虑一块与液面垂直没入液体内的平面薄板，来求其一面所受的压力. 设薄板为一曲边梯形，其曲边的方程为 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）. 建立坐标系如图 6.27 所示，x 轴铅直向下，y 轴与液面相齐. 当薄板被设想分成许多水平的窄条时，相应于典型小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的小窄条上深度变化不大，从而压强变化也不大，可近似地取为 ρgx，同时小窄条的面积用矩形面积来近似替代，即为 $f(x)\mathrm{d}x$，故小窄条一面所受压力近似地表示为

$$\mathrm{d}F=\rho gx\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

从而

$$F=\rho g\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

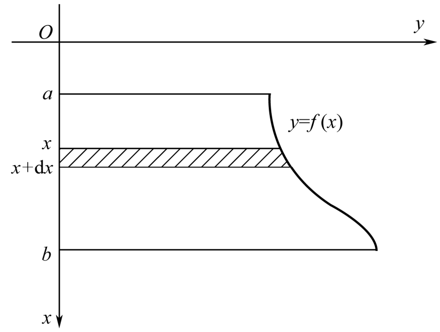


图 6.27

【例 5】一矩形闸门垂直放入水中，长 6m，高 10m，闸门上端刚好与水面平齐，求闸门一侧所受到水的压力.

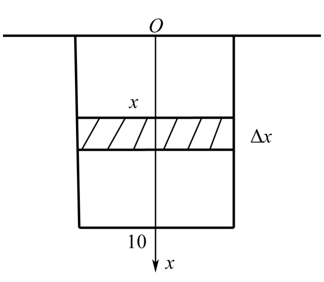


图6.28

解　建立坐标系如图 6.28 所示.

在区间[0,10]上任取一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$，在小区间两端点做 Ox 轴的垂线，得一小矩形，这小矩形的面积为 6dx，压强近似于 $p=\rho gx$，这一小矩形的压力微元为

$$\mathrm{d}F=6\rho gx\mathrm{d}x$$

所以压力为

$$F=\int_0^{10}6\rho gx\,\mathrm{d}x=6\times10^3\times9.8\times\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{10}=2.94\times10^7\text{（N）}$$

【例 6】一横放的圆柱形水桶，桶内盛有半桶水，桶端面半径为 0.6m，计算桶的一个端面上所受的压力.

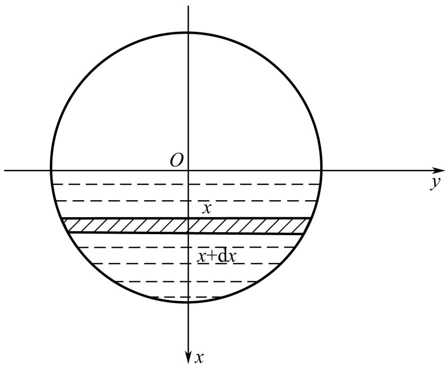


图6.29

解　建立坐标系如图 6.29 所示，桶的端面圆的方程为

$$x^2+y^2=0.36$$

相应于$[x,x+\mathrm{d}x]$的小窄条上的压力微元为

$$\mathrm{d}F=2\rho gx\sqrt{0.36-x^2}\,\mathrm{d}x$$

所以桶的一个端面上所受的压力为

$$F=2\rho g\int_0^{0.6}x\sqrt{0.36-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\rho g(0.6)^3$$

$$\approx1.41\times10^3\text{（N）}$$

式中，$\rho=1\times10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$g=9.8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

加 油 站

【例 7】设一物体以速度$v(t)=20t-t^2$做直线运动，求：

（1）物体从开始运动到任一时刻t（$0\leqslant t\leqslant20$）所经过的路程；

（2）当物体到达加速度为 0 时所经过的路程.

解　（1）$S=\int_0^t\left(20t-t^2\right)\mathrm{d}t=10t^2-\frac{1}{3}t^3$

（2）加速度为$a(t)=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=20-2t$.

当$a(t)=0$时，$t=10$，所以

$$S=\int_0^{10}\left(20t-t^2\right)\mathrm{d}t=10t^2\Big|_0^{10}-\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{10}=\frac{2000}{3}$$

【例 8】一弹簧原长为 1m，把它压缩 1cm 时所用的力为 0.05N，求把弹簧从 80cm 压缩到 60cm 所做的功.

解　由胡克定律$F=kx$，$x=1\mathrm{cm}=0.01\mathrm{m}$，$F=0.05\mathrm{N}$，得$k=5$，所以

$$W=\int_{0.2}^{0.4}5x\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}x^2\Big|_{0.2}^{0.4}=\frac{5}{2}\left(0.4^2-0.2^2\right)=0.3\text{（J）}$$

【例 9】半径为 1m 的半球形水池见图 6.30，池中充满了水，把池内水全部抽完需做多少功？

解　建立坐标系如图 6.30 所示，故此圆的方程为$x^2+y^2=1$. 选水深x为积分变量，$x\in[0,1]$，在$[0,1]$的任意小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$上相应小薄圆柱体水重近似为

$$9.8\rho\pi y^2\mathrm{d}x=9.8\rho\pi(1-x^2)\mathrm{d}x$$

将这小水柱体提到距离池口为x处，所以功的微元为

$$\mathrm{d}W=9.8\rho\pi(1-x^2)\mathrm{d}x\cdot x=9.8\rho\pi(x-x^3)\mathrm{d}x$$

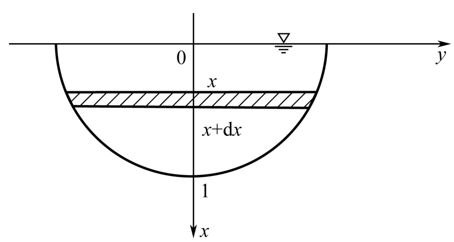


图 6.30

以 $9.8\rho\pi(x-x^3)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，在[0,1]上做定积分，得所求的功为

$$W=\int_0^1 9.8\,\rho\pi(x-x^3)\mathrm{d}x=9.8\rho\pi\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{9.8}{4}\rho\pi=7.70\times10^3\text{（J）}$$

【例 10】岸边有一小帆船，一阵风把它沿直线吹出 e^3-1（m），已知帆船离岸 x（m）时，帆上所受的风力为 $10\ln(1+x)$（N），求阵风对帆船所做的功.

解　由公式（6.14）得

$$\begin{aligned}W&=\int_0^{\mathrm{e}^3-1}10\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=10\left[x\ln(1+x)\Big|_0^{\mathrm{e}^3-1}-\int_0^{\mathrm{e}^3-1}x\,\mathrm{d}\ln(1+x)\right]\\&=10\left[3(\mathrm{e}^3-1)-\int_0^{\mathrm{e}^3-1}\frac{x}{1+x}\mathrm{d}x\right]\\&=10\left[3(\mathrm{e}^3-1)-\int_0^{\mathrm{e}^3-1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x\right]\\&=10\left[3(\mathrm{e}^3-1)-(\mathrm{e}^3-1)+\ln(1+x)\Big|_0^{\mathrm{e}^3-1}\right]\\&=10(2\mathrm{e}^3+1)\text{（J）}\end{aligned}$$

【例 11】一薄板形状为椭圆形，椭圆的轴为 2m 和 1m．将此薄板一半铅直置入水中，并使椭圆短轴与水平面相齐（见图 6.31），计算此薄板一侧所受水的压力.

解　建立坐标系如图 6.31 所示.

椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$，所以 $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$，取 x 为积分变量，$x\in[0,1]$，在[0,1]的任一小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 上压力微元为

$$\mathrm{d}F=\rho gx2y\mathrm{d}x=9.8\times10^3x\cdot\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

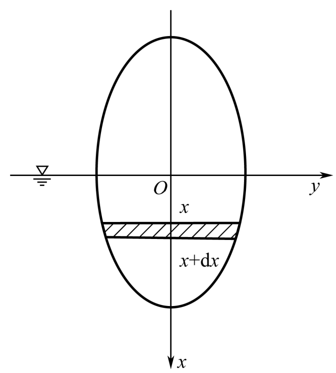


图 6.31

在[0,1]上做定积分，便得所求压力为

$$\begin{aligned}F&=\int_0^1 9.8\times10^3x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\\&=9.8\times10^3\times\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(1-x^2)\\&=9.8\times10^3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1\\&\approx3.27\times10^3\text{（N）}\end{aligned}$$

习　题　6.3

一、计算题

1．设有一长为 25cm 的弹簧，若加以 0.98N 之力，则弹簧伸长到 30cm，求使弹簧由 25cm 伸长到 40cm 所做的功.

2．设有一圆柱形水桶，底半径为 R，高为 H（单位：m）.

（1）如果桶中盛满水，问将水从桶口抽出一半及全部抽出所做的功各为多少？

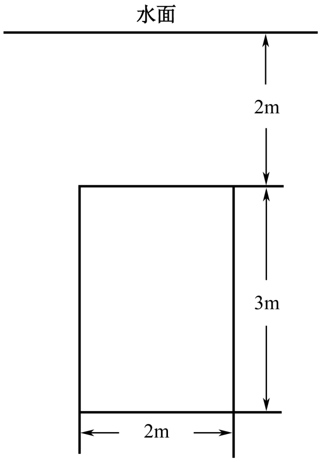


图 6.32

（2）如果桶中盛水一半，问将水从桶口全部抽出所做的功为多少？

3．有铁锤将一铁钉钉入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉钉入木板的深度成正比．在钉第一次时，将铁钉钉入木板 1cm，如果铁锤每次锤击铁钉所做的功相等，问锤击第二次时，铁钉又钉入多少？

4．把长为 10m，宽为 6m，高为 5m 的储水池内盛满的水全部抽出，需做多少功？

5．有一闸门，它的形状和尺寸如图 6.32 所示，水面超过门顶 2m，求闸门上所受的水压力．

6．一底为 8cm，高为 6cm 的等腰三角形片，垂直地沉没在水中，顶在上、底在下且与水面平行，而顶离水面 3cm．试求它每面所受的压力．

本 章 小 结

本章在理解和掌握用微元法将实际问题表达成定积分的分析方法基础上，重点掌握平面图形的面积及立体体积的计算，以及平面曲线的弧长、简单的变力做功、水压力、引力等物理量的计算．

（1）设曲边梯形由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$、$x=b$（$a<b$）与 x 轴所围成，则面积为

$$S=\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$$

（2）设某旋转体是由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$、$x=b$（$a<b$）与 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体，则它的体积为

$$V=\pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$$

（3）设某立体由曲面和平面 $x=a$、$x=b$（$a<b$）围成，$A(x)$为过点 x 且垂直于 x 轴的截面积，其中 $A(x)$是已知的连续函数，则它的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$$

（4）设曲线弧由方程 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）给出，则弧长函数 $s=s(x)$的微分满足

$$(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2 \text{ 或 } \mathrm{d}s=\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

对应区间$[a,b]$上曲线弧的长度为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}x$$

（5）变力做功、水压力、引力的计算．

复 习 题 6

一、填空题

1．$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由 $x=a$ 、$x=b$ 、$f(x)$ 及 x 轴所围图形的面积是________．

2．$y=\mathrm{e}^x$、$y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=1$ 所围图形的面积是____________.

3．$y=2x+3$ 与 $y=x^2$ 所围图形的面积是________.

4．由 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$x=0$、$x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围图形的面积是__________.

5．$y^2=2x$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一段曲线弧长等于_________.

6．设 $y=x^2$ 与 $y^2=kx$ 所围图形的面积为 $\dfrac{2}{3}$，则 $k=$________.

7．$y=x^2$、$x=2$、$y=0$ 所围图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周生成的立体的体积 $V_x=$______，$V_y=$________.

8．$y=x^2$、$x=1$、$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转一周生成的立体的体积 $V_x=$_________，$V_y=$________.

二、单项选择题

1．设 $y=x^2$ 与 $y=cx^3$（$c>0$）所围成图形的面积为 $\dfrac{2}{3}$，则 c=（　　）.

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

2．$y^2=2x$ 与 $y=x-4$ 所围成图形的面积为（　　）.

A．$\dfrac{8}{5}$　　B．$\dfrac{18}{5}$　　C．8　　D．18

3．$y=\sin^{\frac{3}{2}}x$（$0\leqslant x\leqslant \pi$）与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转生成的立体的体积是（　　）.

A．$\dfrac{3}{4}\pi$　　B．$\dfrac{4}{5}\pi$　　C．$\dfrac{4}{3}\pi$　　D．$\dfrac{5}{4}\pi$

4．曲线 $y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 上相应于从 $x=3$ 到 $x=8$ 的一段弧长为（　　）.

A．$\dfrac{38}{3}$　　B．$\dfrac{28}{3}$　　C．9　　D．6

5．$y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$、$x=\mathrm{e}$ 所围成图形的面积是（　　）.

A．$\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　B．$2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　C．$\mathrm{e}-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$　　D．$2-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

6．曲线 $9y^2=4x^3$ 上从 $x=0$ 到 $x=1$ 的一段弧长为（　　）.

A．$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{4}{3}\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{3}{4}\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}$　　D．$\dfrac{3}{4}\sqrt{2}-\dfrac{1}{3}$

7．$y^2=ax$（$a>0$）与 $x=1$ 所围成图形的面积为 $\dfrac{4}{3}$，则 $a=$（　　）.

A．4　　B．3　　C．2　　D．1

8．由 $y=x^3$、$y=0$ 及 $x=1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周生成的立体的体积为（　　）.

A．$\dfrac{\pi}{8}$　　B．$\dfrac{\pi}{7}$　　C．$\dfrac{\pi}{6}$　　D．$\dfrac{\pi}{4}$

9．矩形闸门宽 a（m），高 h（m），垂直放在水（水的密度 ρ=1）中，上沿与水面相齐，

则闸门上所受压力 F=（　　）.

A．$\int_0^h gahdh$　　B．$\int_0^a gahdh$　　C．$\int_0^h \frac{1}{2} gahdh$　　D．$\int_0^h 2gahdh$

10．两曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$相交于(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，$x_1<x_2$，$f(x)>0$，$g(x)>0$，这两曲线所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V=（　　）.

A．$\int_{x_1}^{x_2} \pi [f(x)-g(x)]^2 dx$　　B．$\int_{x_1}^{x_2} \pi |f^2(x)-g^2(x)| dx$

C．$\int_{x_1}^{x_2} [\pi f(x)]^2 dx - \int_{x_1}^{x_2} [\pi g(x)]^2 dx$　　D．$\int_{x_1}^{x_2} [\pi f(x) - \pi g(x)]^2 dx$

三、计算题

1．求由曲线 $y = e^{-x}$ 与过点 $(-1, e)$ 的切线及 x 轴所围图形的面积.

2．$y = \sin x$（$0 \leqslant x \leqslant \pi$）与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转生成的立体体积及绕 y 轴旋转生成的立体体积.

3．长 10m 的铁索下垂于矿井中，已知铁索每米的质量为 8kg．问将此铁索提出地面所需做的功.

4．把一个带电荷是 $+q$ 的点电荷放在 x 轴上坐标原点 O 处，它产生一个电场，这个电场对周围的电荷有作用力．由物理学知道，如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 x 的地方，那么电场对它的作用力的大小为

$$F = k\frac{q}{r^2}\ （k 为常数）$$

当这个正电荷在电场中从 $x = a$ 处（$a > 0$）沿 x 轴移动到 $x = b$（$a < b$）处，计算电场力 F 对它做的功.

5．在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体，在等温条件下，由于气体的膨胀，把容器中的一个活塞（面积为 S）从点 a 处推移到点 b 处，计算在移动过程中，气体压力所做的功.

6．有一圆柱形的大蓄水池，直径为 20m，高为 30m，盛水的深度为 27m，求将水从池口全部抽出所需做的功.